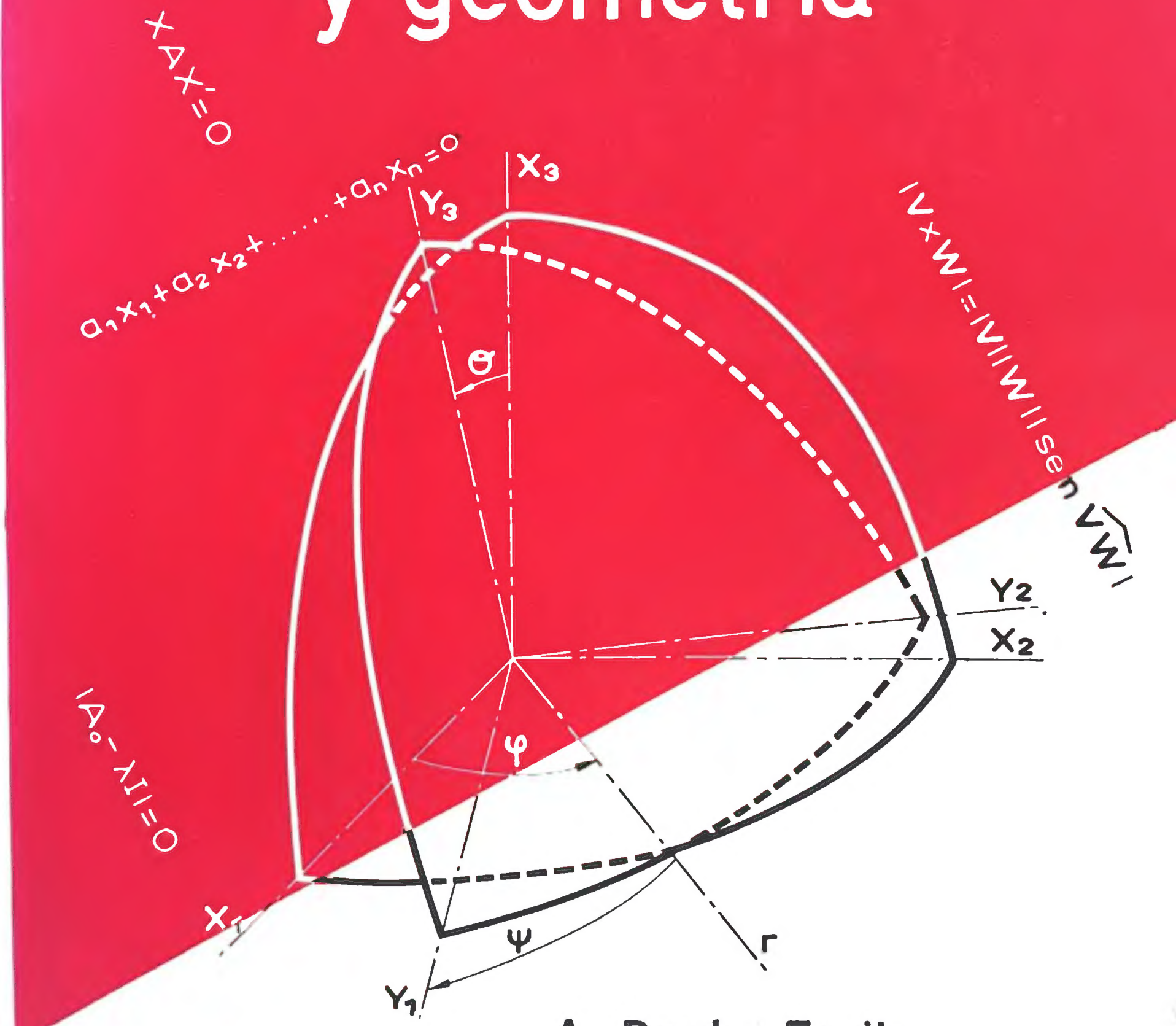
elementos de álgebra lineal y geometría

II



A. Pardo Fraile

J. A. Díaz Hernando

ELEMENTOS
DE
ALGEBRA LINEAL
Y
GEOMETRIA

por

Antonio Pardo Fraile
Licenciado en Ciencias Matemáticas
Catedrático de Instituto, excedente

y

Juan-Angel Díaz Hernando
Doctor Ingeniero Industrial

TOMO II

MADRID, 1966

JAR'23

13

geometría afín del plano

Nos proponemos estudiar en este capítulo las propiedades del plano que son independientes de los conceptos de distancia y de ángulo. Veremos que estas propiedades, llamadas afines, son consecuencia inmediata de una estructura de espacio vectorial.

Mientras no se diga lo contrario, en este capítulo y en los siguientes, los términos: punto, recta, plano, espacio, etc., tendrán el significado habitual en geometría elemental.

13.1. Plano afín. Coordenadas en el plano afín.

Sea E_2 un plano y V_2 el espacio vectorial de los vectores libres del mismo. Hemos visto en el capítulo 7 que, asociado a cada pareja ordenada de puntos de E_2 existía un vector libre, el único que tenía como representante de clase al vector del plano cuyo origen y extremos eran, respectivamente, el primer y segundo punto de dicha pareja ordenada. Es decir, existe una aplicación φ: $E_2 \times E_2 \longrightarrow V_2$ dada por

$$\varphi(P, Q) = \{\overrightarrow{PQ}\}.$$

Esta correspondencia φ es tal que verifica:

A_1. Si $P \in E_2$ y $\mathbf{x} \in V_2$, existe un único punto $Q \in E_2$ tal que $\varphi(P, Q) = \{\overrightarrow{PQ}\} = \mathbf{x}$. (Lema 1 de [7.1]).

A_2. $\varphi(P, Q) = \{\overrightarrow{PQ}\} = \mathbf{0}$ si y sólo si $P = Q$. En efecto, el vector libre $\mathbf{0}$ es tal que todos sus representantes tienen sus extremos confundidos,

A_3. $\varphi(P, Q) + \varphi(Q, R) = \varphi(P, R)$. Es consecuencia de la forma en que se definió la suma de vectores libres.

Diremos que E_2 es el *plano afín* asociado al espacio vectorial V_2.

Sea O un punto fijo del plano afín E_2 y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ una base de V_2. Al conjunto $\{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ le llamaremos *sistema de referencia* en el plano afín. A las rectas que pasando por el origen O tienen las direcciones de los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ se les llama *ejes de abscisas y ordenadas,* respectivamente.

A todo punto X de E_2 le corresponde un único vector libre $\{\overrightarrow{OX}\}$ de V_2 y la expresión de este vector como combinación lineal de los elementos de la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es única

$$\{\overrightarrow{OX}\} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2.$$

donde x_1 y x_2 son números reales.

Recíprocamente, dada una pareja ordenada cualquiera de números reales (x_1, x_2), existe un único vector libre $x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2$, que tiene dicha pareja como coordenadas respecto a la base $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, y por último, existe un único punto X de E_2 tal que

$$\{\overrightarrow{OX}\} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2.$$

Puesto que la pareja ordenada de números reales (x_1, x_2) determina de manera única al punto X, podemos decir que los números x_1, x_2 son las *coordenadas* de X respecto al sistema de referencia $\{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. A la primera coordenada se la llama *abscisa* y a la segunda *ordenada.*

Obsérvese que a los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ únicamente se les ha exigido que constituyan una base. Es decir, sus módulos pueden tener cualquier valor real positivo y sus direcciones pueden ser cualesquiera con tal de que no sean la misma.

El primer problema que se nos plantea es el de hallar las relaciones que ligan a las coordenadas de un mismo punto X de E_2 respecto a dos sistemas de referencia distintos. Sean éstos $\{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ $\{\bar{O}; \bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2\}$ y las coordenadas de X, x_1, x_2 respecto al primero y $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ respecto al segundo, es decir,

$$\{\overrightarrow{OX}\} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2$$
$$\{\overrightarrow{\bar{O}X}\} = \bar{x}_1\bar{\mathbf{u}}_1 + \bar{x}_2\bar{\mathbf{u}}_2$$

Supongamos que las coordenadas del punto $\bar{O}$ respecto al primer sistema de referencia son a_{o1}, a_{o2}, luego

$$\{\overrightarrow{O\bar{O}}\} = a_{o1}\mathbf{u}_1 + a_{o2}\mathbf{u}_2$$

y que la relación que liga a las dos bases viene dada por las expresiones

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{12}\mathbf{u}_2$$
$$\bar{\mathbf{u}}_2 = a_{21}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2.$$

En virtud de A_3, tenemos que

$$\overrightarrow{\{OX\}} = \overrightarrow{\{O\bar{O}\}} + \overrightarrow{\{\bar{O}X\}},$$

de donde, por sustitución,

$$\begin{aligned} x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 &= a_{o1}\mathbf{u}_1 + a_{o2}\mathbf{u}_2 + \bar{x}_1\bar{\mathbf{u}}_1 + \bar{x}_2\bar{\mathbf{u}}_2 = \\ &= a_{o1}\mathbf{u}_1 + a_{o2}\mathbf{u}_2 + \bar{x}_1(a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{12}\mathbf{u}_2) + \bar{x}_2(a_{21}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2) = \\ &= (a_{o1} + a_{11}\bar{x}_1 + a_{21}\bar{x}_2)\mathbf{u}_1 + (a_{o2} + a_{12}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2)\mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

luego, teniendo en cuenta que los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son linealmente independientes, obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{o1} + a_{11}\bar{x}_1 + a_{21}\bar{x}_2 \\ x_2 &= a_{o2} + a_{12}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 \end{aligned} \tag{1}$$

que son las relaciones buscadas. También se pueden escribir en la siguiente forma matricial

$$(1 \quad x_1 \quad x_2) = (1 \quad \bar{x}_1 \quad \bar{x}_2) \begin{pmatrix} 1 & a_{o1} & a_{o2} \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{2}$$

o bien, llamando X a la matriz $(1 \; x_1 \; x_2)$, $\bar{X}$ a la $(1 \; \bar{x}_1 \; \bar{x}_2)$ y A a la

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{o1} & a_{o2} \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$X = \bar{X}A. \tag{2'}$$

Obsérvese que la matriz A es regular. En efecto:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

ya que los vectores $\bar{\mathbf{u}}_1$ y $\bar{\mathbf{u}}_2$ son linealmente independientes. Entonces, multiplicando por la derecha por A^{-1} ambos miembros de (2') obtenemos

$$\bar{X} = XA^{-1}. \tag{2''}$$

EJEMPLO 1. Las coordenadas de O respecto al sistema de referencia $\{O;\ \bar{\mathbf{u}}_1,\ \bar{\mathbf{u}}_2\}$ son 3 y -2 y las coordenadas de $\bar{\mathbf{u}}_1$ y $\bar{\mathbf{u}}_2$ respecto a la base $\{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2\}$ son 1, -2 y -2, 5, respectivamente. Entonces

$$\overrightarrow{\{OX\}} = \overrightarrow{\{O\bar{O}\}} + \overrightarrow{\{\bar{O}X\}} = -\overrightarrow{\{\bar{O}O\}} + \overrightarrow{\{\bar{O}X\}},$$

luego

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 = -(3\bar{\mathbf{u}}_1 - 2\bar{\mathbf{u}}_2) + \bar{x}_1\bar{\mathbf{u}}_1 + \bar{x}_2\bar{\mathbf{u}}_2 =$$
$$= (-3 + \bar{x}_1)(\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2) + (2 + \bar{x}_2)(-2\mathbf{u}_1 + 5\mathbf{u}_2)$$

de donde

$$x_1 = -3 + \bar{x}_1 - 4 - 2\bar{x}_2 = -7 + \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2$$
$$x_2 = 6 - 2\bar{x}_1 + 10 + 5\bar{x}_2 = 16 - 2\bar{x}_1 + 5\bar{x}_2$$

y en forma matricial

$$X = \bar{X}\begin{pmatrix} 1 & -7 & 16 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

o bien

$$\bar{X} = X\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIOS

1. Las coordenadas de los puntos A, B, C respecto al sistema de referencia $\{O;\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2\}$ son (3, 1), $(-4, 2)$ y $(3, -2)$, respectivamente. Hállense las ecuaciones de cambio de sistema de referencia, cuando se toma como nuevo sistema el $\{A;\ \overrightarrow{\{AB\}},\ \overrightarrow{\{AC\}}\}$.

2. Las coordenadas de los puntos A, B, C respecto al sistema de referencia $\{O;\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2\}$ son (1, 9), (5, 7) y (2, 7), respectivamente, y respecto al $\{\bar{O};\ \bar{\mathbf{u}}_1,\ \bar{\mathbf{u}}_2\}$ son (2, 1), $(-1, 2)$, (1, 1). Hállense las fórmulas de cambio de sistema de referencia y las coordenadas de O respecto a $\{\bar{O};\ \bar{\mathbf{u}}_1,\ \bar{\mathbf{u}}_2\}$.

3. Las coordenadas del punto A respecto a $\{O;\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2\}$ son (3, 6) y respecto a $\{\bar{O};\ \bar{\mathbf{u}}_1,\ \bar{\mathbf{u}}_2\}$ son $(-1, 1)$. Hállense las coordenadas de O respecto al primer sistema, sabiendo que $\bar{\mathbf{u}}_1 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ y $\bar{\mathbf{u}}_2 = 3\mathbf{u}_1$.

4. Sean C y C' los conjuntos de puntos de E_2 tales que sus coordenadas respecto al sistema de referencia $\{O;\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2\}$ cumplen, respectivamente, las condiciones $3x_1 - 2x_2 + 3 = 0$ y $x_1 + 4x_2 - 1 = 0$. Si dichos conjuntos vienen caracterizados respecto al sistema $\{\bar{O};\ \bar{\mathbf{u}}_1,\ \bar{\mathbf{u}}_2\}$ por las ecuaciones $-11\bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 + 5 = 0$ y $\bar{x}_1 + 18\bar{x}_2 + 9 = 0$, hállense las ecuaciones de cambio de

sistema de referencia y las coordenadas de $C \cap C'$ respecto a uno y otro sistema.

13.2. Ecuación vectorial de la recta. Ecuaciones paramétricas. Posiciones relativas de puntos y rectas.

Sea O un punto fijo del plano afín E_2, llamaremos *vector de posición* de un punto P de E_2 respecto al origen O, al vector libre $\varphi(O, P) = \{\overrightarrow{OP}\}$.

Sea C un lugar geométrico de puntos de E_2, es decir, un subconjunto de E_2. Llamaremos *ecuación vectorial* de C a la relación o relaciones que deben cumplir los vectores de posición de los puntos de C y sólo éstos.

Ecuación vectorial de la recta.

Vamos a determinar la ecuación vectorial de una recta r del plano afín E_2. Como sabemos, dos puntos distintos determinan una recta. Sean éstos P y Q y sus vectores de posición respecto al origen O, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$, respectivamente, es decir:

$$\mathbf{p} = \{\overrightarrow{OP}\} \quad \text{y} \quad \mathbf{q} = \{\overrightarrow{OQ}\}.$$

Si X es un punto cualquiera de la recta determinada por los puntos P, Q tenemos la siguiente ecuación vectorial:

$$\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OP}\} + \{\overrightarrow{PX}\} = \{\overrightarrow{OP}\} + \lambda\{\overrightarrow{PQ}\} = \{\overrightarrow{OP}\} + \lambda(\{\overrightarrow{OQ}\} - \{\overrightarrow{OP}\})$$

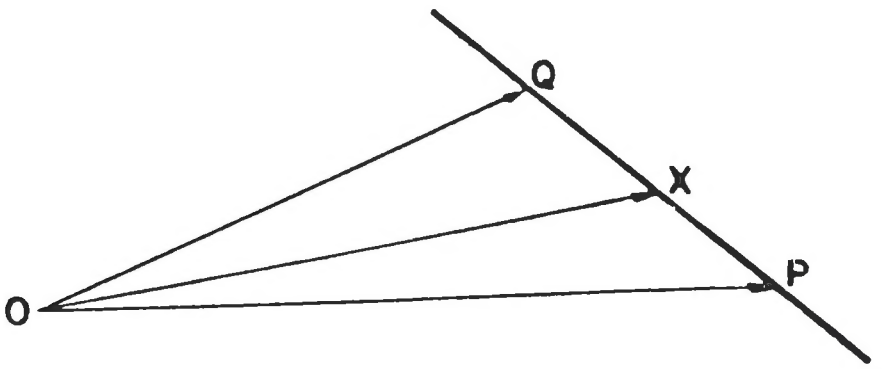


FIG. 1.

y si llamamos $\mathbf{x}$ al vector de posición de un punto cualquiera de la recta r,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \tag{3}$$

que es la relación que deben cumplir los vectores de posición de los puntos de la recta r. Pero, recíprocamente, todo punto X cuyo vec-

tor de posición $\mathbf{x}$ verifique la relación (3) pertenece a r. En efecto, (3) se puede escribir en la forma

$$\mathbf{x}-\mathbf{p}=\lambda(\mathbf{q}-\mathbf{p})$$

o lo que es lo mismo

$$\{\overrightarrow{OX}\}-\{\overrightarrow{OP}\}=\lambda(\{\overrightarrow{OQ}\}-\{\overrightarrow{OP}\}),$$

de donde,

$$\{\overrightarrow{PX}\}=\lambda\{\overrightarrow{PQ}\},$$

luego los vectores $\overrightarrow{PX}$ y $\overrightarrow{PQ}$ tienen el origen P común y la misma dirección, por tanto, P, Q y X están alineados.

Podemos, pues, afirmar que (3) es la *ecuación vectorial de la recta* r.

Obsérvese que el vector $\mathbf{q}-\mathbf{p}=\{\overrightarrow{PQ}\}$ es un vector que tiene la misma dirección que la recta r e igual les sucede a todos los vectores $\lambda(\mathbf{q}-\mathbf{p})$, es decir, a todos los vectores de la variedad lineal engendrada por el vector $\mathbf{q}-\mathbf{p}$. A esta variedad lineal se le llama *variedad de dirección* de la recta r y a cualquiera de sus elementos (salvo el cero) *un vector de dirección* de r.

ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA.

Si respecto al sistema de referencia $\{O;\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2\}$ las coordenadas de los puntos P, Q, X son $(p_1,\ p_2)$, $(q_1,\ q_2)$ y $(x_1,\ x_2)$, respectivamente, las coordenadas de los vectores de posición $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ y $\mathbf{x}$, serán las mismas, luego la ecuación vectorial (3) es equivalente a las dos ecuaciones escalares siguientes:

$$\begin{aligned} x_1&=p_1+\lambda(q_1-p_1)\\ x_2&=p_2+\lambda(q_2-p_2)\end{aligned} \tag{4}$$

que se llaman *ecuaciones paramétricas* de la recta r.

EJEMPLO 2. La ecuación vectorial de la recta determinada por los puntos $P\ (2,\ -3)$ y $Q\ (4,\ 6)$ es

$$(x_1,\ x_2)=(2,\ -3)+\lambda(2,\ 9)$$

y sus ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x_1&=\ \ 2+2\lambda\\ x_2&=-3+9\lambda\end{aligned}$$

Para hallar puntos de la recta basta con dar valores a λ. Así, para $\lambda=1$ obtenemos el punto $(4, 6)$, para $\lambda=-2$ el $(-2, -21)$, etc. Un vector de dirección de la recta es el $(2, 9)$, también lo es el $(6, 27)$ y, en general, el $(2k, 9k)$ para cualquier valor real de k distinto de cero.

Condición para que un punto pertenezca a una recta.

Dada una recta r mediante su ecuación vectorial o, lo que es análogo, por sus ecuaciones paramétricas

$$x_1=p_1+\lambda v_1$$
$$x_2=p_2+\lambda v_2$$

la condición para que un punto $R\ (r_1, r_2)$ pertenezca a la recta r, es que el sistema

$$v_1\lambda=r_1-p_1$$
$$v_2\lambda=r_2-p_2$$

sea compatible.

Condición para que tres puntos sean colineales.

Sean P, Q y R tres puntos distintos cuyas coordenadas respecto al sistema de referencia $\{O;\ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ son respectivamente (p_1, p_2), (q_1, q_2) y (r_1, r_2). ¿Cuál será la condición para que estos tres puntos sean colineales, es decir, pertenecientes a una misma recta?

Sea r la recta determinada por los puntos P y Q. Sus ecuaciones paramétricas serán

$$x_1=p_1+\lambda(q_1-p_1)$$
$$x_2=p_2+\lambda(q_2-p_2)$$

Si $R\in r$, se tiene que verificar

$$r_1=p_1+\lambda(q_1-p_1)$$
$$r_2=p_2+\lambda(q_2-p_2)$$

para algún valor de λ, luego el sistema

$$(q_1-p_1)\lambda=r_1-p_1$$
$$(q_2-p_2)\lambda=r_2-p_2$$

tiene que ser compatible. Ahora bien, el rango de la matriz de los coeficientes es 1, como consecuencia de ser $P\neq Q$, luego para que el sistema sea compatible tiene que verificarse que

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} q_1-p_1 & r_1-p_1 \\ q_2-p_2 & r_2-p_2 \end{pmatrix}=1$$

o lo que es igual

$$\begin{vmatrix} q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

Si, por el contrario, los tres puntos no están alineados $\Longrightarrow R \notin r$, el sistema anterior no es compatible, el rango de la matriz ampliada tiene que ser distinto al rango de la matriz de los coeficientes, lo que exige que el determinante de aquélla sea distinto de cero. En resumen, la condición necesaria y suficiente para que los puntos P, Q y R sean colineales, es que se verifique (5).

Posición relativa de dos rectas.

Trataremos ahora de hallar las posiciones relativas de las rectas

$$r \equiv \mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{v} \quad \text{y} \quad s \equiv \mathbf{x} = \mathbf{q} + \mu \mathbf{w} \tag{6}$$

El problema geométrico de hallar los puntos comunes a ambas rectas es equivalente al problema algebraico de resolver el sistema lineal en λ y μ que resulta al igualar los segundos miembros de las ecuaciones (6)

$$\mathbf{p} + \lambda \mathbf{v} = \mathbf{q} + \mu \mathbf{w},$$

es decir,

$$\begin{aligned} v_1\lambda - w_1\mu &= q_1 - p_1 \\ v_2\lambda - w_2\mu &= q_2 - p_2 \end{aligned} \tag{6'}$$

Llamaremos A y B, respectivamente, a las matrices

$$\begin{pmatrix} v_1 & -w_1 \\ v_2 & -w_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} v_1 & -w_1 & q_1 - p_1 \\ v_2 & -w_2 & q_2 - p_2 \end{pmatrix}$$

Casos que pueden ocurrir:

1.° $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2$. El sistema (6') es compatible y determinado. Existe un solo punto común a las rectas r y s. Las rectas son secantes.

Obsérvese que $\operatorname{rg} A = 2$ equivale a que los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ sean linealmente independientes.

2.° $\operatorname{rg} A = 1$ y $\operatorname{rg} B = 2$. El sistema (6') es incompatible. No existe ningún punto común a ambas rectas, luego éstas son paralelas.

En este caso $\operatorname{rg} A = 1$ equivale a que los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ sean linealmente dependientes o, lo que es igual, a que las dos rectas tengan la misma variedad de dirección. Por ser $\operatorname{rg} B = 2$ el vector $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ no pertenece a esta variedad de dirección común.

3.° $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 1$. El sistema es compatible e indeterminado. Las dos rectas coinciden.

Como en el caso anterior las dos variedades de dirección son la misma, pero ahora el vector $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ pertenece a dicha variedad.

EJEMPLO 3. Las rectas

$$r \equiv \mathbf{x} = (2,\ 3) + \lambda(5,\ -2) \quad \text{y} \quad s \equiv \mathbf{x} = (1,\ 0) + \mu(1,\ 4)$$

se cortan, pues se ve a simple vista que los vectores $(5,\ -2)$ y $(1,\ 4)$ son lineamente independientes (no son proporcionales). Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 5\lambda - \mu &= -1 \\ -2\lambda - 4\mu &= -3 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$\lambda = -\frac{1}{22}, \qquad \mu = \frac{17}{22}$$

y llevados estos valores de λ y de μ a la ecuación de la primera recta y a la de la segunda, respectivamente, obtenemos en los dos casos el mismo punto

$$P = \left(\frac{39}{22},\ \frac{68}{22}\right).$$

EJEMPLO 4. Las rectas

$$r \equiv \mathbf{x} = (2,\ 5) + \lambda(4,\ -1) \quad \text{y} \quad s \equiv \mathbf{x} = (-1,\ 2) + \mu(-8,\ 2)$$

tienen la misma dirección, pues los vectores $(4,\ -1)$ y $(-8,\ 2)$ son linealmente dependientes. Pero el vector

$$(-1,\ 2) - (2,\ 5) = (-3,\ -3)$$

no pertenece a la variedad de dirección común a ambas rectas, luego éstas son paralelas.

EJEMPLO 5. Las rectas

$$r \equiv \mathbf{x} = (3,\ -10) + \lambda(3,\ -4) \quad \text{y} \quad s \equiv \mathbf{x} = (-6,\ 2) + \mu(6,\ -8)$$

son la misma recta, pues los vectores $(3,\ -4)$ y $(6,\ -8)$ son proporcionales y el vector

$$(-6,\ 2) - (3,\ -10) = (-9,\ 12)$$

pertenece a la variedad de dirección común a ambas.

EJERCICIOS

1. Ecuación vectorial de la recta determinada por los puntos P y Q tales que $\{\overrightarrow{OP}\}=3\mathbf{v}_1-2\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$ y $\{\overrightarrow{OQ}\}=-\{\overrightarrow{OP}\}$, siendo $\mathbf{v}_1=2\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2$, $\mathbf{v}_2=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{v}_3=4\mathbf{u}_1+5\mathbf{u}_2$.

2. Ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P\ (3, -5)$ y cuya dirección es la del vector $4\mathbf{u}_1-7\mathbf{u}_2$.

3. Hállese la posición relativa de las rectas r, determinada por los puntos $A\ (5, 7)$ y $B\ (-2, 3)$ y la $s\equiv \mathbf{x}=(2, 1)+\lambda(4, -1)$.

4. Hállese la posición relativa de las rectas r, que pasa por el punto $P\ (2, 5)$ y cuya variedad de dirección tiene por ecuación no paramétrica $2x_1-3x_2=0$, y la $s\equiv \mathbf{x}=(2, 7)+\lambda(-6, -4)$.

5. Posición relativa de las rectas $r\equiv \mathbf{x}=(2, 0)+\lambda(4, 1)$, $s\equiv \mathbf{x}=\mu(3, 5)$ y t que pasa por el punto $(2, -2)$ y es paralela al vector $\mathbf{v}=4\mathbf{u}_1$.

13.3. Ecuaciones en forma continua y general de la recta. Posiciones relativas de puntos y rectas.

Si entre las dos ecuaciones paramétricas (4) de la recta r eliminamos el parámetro λ, obtenemos:

$$\frac{x_1-p_1}{q_1-p_1}=\frac{x_2-p_2}{q_2-p_2}$$

y haciendo $q_1-p_1=v_1$ y $q_2-p_2=v_2$:

$$\frac{x_1-p_1}{v_1}=\frac{x_2-p_2}{v_2} \tag{7}$$

y quitando denominadores e igualando a cero

$$v_2x_1-v_1x_2+v_1p_2-v_2p_1=0$$

luego las coordenadas de los puntos de la recta r verifican la ecuación lineal

$$ax_1+bx_2+c=0 \tag{8}$$

donde hemos puesto

$$a=v_2, \qquad b=-v_1 \qquad \text{y} \qquad c=v_1p_2-v_2p_1.$$

Veamos que los únicos puntos de E_2 cuyas coordenadas verifi-

can la ecuación (8) son los de la recta r. En efecto, el punto P por hipótesis pertenece a r, luego, por lo que hemos visto

$$ap_1+bp_2+c=0$$

restando esta igualdad miembro a miembro de la (8), obtenemos:

$$a(x_1-p_1)+b(x_2-p_2)=0$$

de donde, recordando la significación de a y b:

$$\frac{x_1-p_1}{v_1}=\frac{x_2-p_2}{v_2}$$

y llamando λ a la razón común, se obtiene:

$$x_1=p_1+\lambda v_1$$
$$x_2=p_2+\lambda v_2$$

que son las ecuaciones paramétricas de r, luego todo punto cuyas coordenadas verifiquen la ecuación (8) pertenece a r. Lo mismo podíamos haber dicho de (7).

A (7) se le llama ecuación de la recta en *forma continua* y a (8) ecuación *general* de la recta.

Obsérvese que en la forma continua los denominadores v_1, v_2 son las coordenadas de un vector de dirección; en cuanto al significado geométrico de la pareja ordenada de números reales (p_1, p_2) es la de coordenadas de un punto fijo de la recta.

Para hallar un vector de dirección de la recta en su forma general basta tomar los coeficientes de la primera y segunda variable, cambiarlos de orden y cambiar el signo de uno de ellos.

EJEMPLO 1. Sea la recta

$$\frac{2x_1-3}{5}=\frac{x_2+4}{2}$$

Un vector de dirección es el $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$ y un punto de la misma el $P\left(\frac{3}{2}, -4\right)$. Obsérvese que ha sido necesario ponerla en forma continua dividiendo numerador y denominador de la primera fracción por 2.

Para que un punto $Q\ (q_1, q_2)$ pertenezca a la recta

$$r \equiv ax_1+bx_2+c=0$$

es necesario que se verifique

$$aq_1 + bq_2 + c = 0.$$

Si queremos hallar puntos de una recta $ax_1 + bx_2 + c = 0$, basta con despejar una de las incógnitas

$$x_1 = -\frac{bx_2 + c}{a}$$

e ir dando valores a la otra.

Veamos nuevamente la condición que han de cumplir las coordenadas de tres puntos distintos P, Q y R para que éstos estén alineados. Si están alineados existe una recta

$$ax_1 + bx_2 + c = 0$$

que los contiene. Entonces

$$\begin{aligned} p_1a + p_2b + c &= 0 \\ q_1a + q_2b + c &= 0 \\ r_1a + r_2b + c &= 0 \end{aligned}$$

donde hemos supuesto que las coordenadas de P, Q y R son (p_1, p_2), (q_1, q_2) y (r_1, r_2), respectivamente.

Pero el que se verifiquen las tres condiciones de más arriba equivale a que el sistema lineal homogéneo

$$\begin{aligned} p_1x + p_2y + z &= 0 \\ q_1x + q_2y + z &= 0 \\ r_1x + r_2y + z &= 0 \end{aligned}$$

tenga solución distinta de la trivial, luego

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que es otra forma de escribir la condición (5).

Tratemos ahora de hallar la ecuación general de la recta determinada por los dos puntos distintos P (p_1, p_2) y Q (q_1, q_2). De acuerdo con lo que acabamos de ver, las coordenadas (x_1, x_2) de los puntos alineados con P y Q, han de cumplir

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ x_1 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

y son los únicos que la cumplen. Luego el determinante anterior igualado a cero es ya la ecuación de la recta. Restando la primera fila de la segunda y de la tercera, y desarrollando por los elementos de la tercera columna, nos queda

$$\begin{vmatrix} q_1-p_1 & q_2-p_2 \\ x_1-p_1 & x_2-p_2 \end{vmatrix} = 0$$

lo que expresa que las dos filas son proporcionales, luego

$$\frac{x_1-p_1}{q_1-p_1} = \frac{x_2-p_2}{q_2-p_2}$$

que es la ecuación de la recta en forma continua.

Desarrollando el primer miembro de (9) por los elementos de la última fila, habríamos obtenido directamente la ecuación general de la recta.

$$(p_2-q_2)x_1 + (q_1-p_1)x_2 + (p_1q_2-p_2q_1) = 0.$$

Hemos visto que si la recta $ax_1+bx_2+c=0$ pasa por el punto $P\ (p_1, p_2)$ se tiene que verificar $ap_1+bp_2+c=0$. Restando esta identidad de la ecuación anterior obtenemos:

$$a(x_1-p_1)+b(x_2-p_2)=0 \tag{10}$$

que para cualquier par de valores reales, no simultáneamente nulos, de a y b representa una recta que contiene a P. Entonces, si consideramos a y b como parámetros variables, la ecuación (10) representa el conjunto de todas las rectas que pasan por el punto P. A este conjunto se le denomina *haz de rectas de vértice P.*

Sean las rectas

$$r \equiv ax_1+bx_2+c=0 \quad \text{y} \quad s \equiv a'x_1+b'x_2+c'=0$$

el problema geométrico de hallar sus puntos comunes es equivalente al de resolver el sistema

$$\begin{aligned} ax_1+bx_2+c&=0 \\ a'x_1+b'x_2+c'&=0 \end{aligned}$$

Sea

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

PRIMER CASO. $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2$. El sistema es compatible y determinado. Existe un único punto común a ambas rectas y éstas son secantes.

SEGUNDO CASO. $\operatorname{rg} A=1$, $\operatorname{rg} B=2$. El sistema es incompatible. No existe punto común a ambas rectas, luego éstas son paralelas.

Por ser $\operatorname{rg} A=1$ se tiene que

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

y por ser $\operatorname{rg} B=2$,

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}.$$

TERCER CASO. $\operatorname{rg} A=\operatorname{rg} B=1$. El sistema es compatible e indeterminado. Las dos rectas coinciden.

Por ser $\operatorname{rg} B=1$ tenemos que

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

Sea ahora una tercera recta $t\equiv a''x_1+b''x_2+c''=0$. El estudio de la posición relativa de r, s y t es equivalente al estudio del sistema lineal

$$\begin{aligned} a\,x_1+b\,x_2+c\,&=0\\ a'x_1+b'x_2+c'&=0\\ a''x_1+b''x_2+c''&=0 \end{aligned}$$

Sea ahora

$$A=\begin{pmatrix} a & b\\ a' & b'\\ a'' & b'' \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}.$$

PRIMER CASO. $\operatorname{rg} A=2$, $\operatorname{rg} B=3$. El sistema es incompatible. No existe ningún punto común a las tres rectas. Pueden ocurrir los siguientes subcasos:

a) Las tres submatrices formadas con dos filas de A son de rango 2. Entonces las rectas r, s y t se cortan dos a dos, formando un triángulo.

b) dos de las submatrices indicadas son de rango 2 y una es de rango 1. Entonces dos rectas son paralelas y la tercera las corta.

Y no hay más subcasos, pues no puede ocurrir que dos submatrices de las indicadas sean de rango 1 sin que lo sea la tercera, con lo que el rango de A no sería 2.

SEGUNDO CASO. $\operatorname{rg} A=\operatorname{rg} B=2$. El sistema es compatible y determinado. Existe un único punto común a las tres rectas.

Por ser $\operatorname{rg} B=2$ una de las filas es combinación lineal de las

otras dos. Supongamos que es la tercera, es decir, existen dos números reales λ y μ tales que

$$a''=\lambda a+\mu a', \quad b''=\lambda b+\mu b', \quad c''=\lambda c+\mu c',$$

entonces

$$t\equiv a''x_1+b''x_2+c''=(\lambda a+\mu a')x_1+(\lambda b+\mu b')x_2+\lambda c+\mu c'=$$
$$=\lambda(ax_1+bx_2+c)+\mu(a'x_1+b'x_2+c')=0$$

o, simbólicamente,

$$t=\lambda r+\mu s.$$

TERCER CASO. rg $A=1$, rg $B=2$. El sistema es incompatible. No existe ningún punto común a las tres rectas. Pueden ocurrir los siguientes subcasos:

a) Que el rango de las tres submatrices que se pueden formar con dos filas de B sea 2. En este caso las tres rectas son distintas y paralelas.

b) Que dos submatrices de las indicadas sean de rango 2 y de rango 1 la tercera. Entonces dos rectas son paralelas y la tercera coincide con una de ellas.

No puede haber más subcasos, ya que dos de las submatrices citadas no pueden ser de rango 1 sin que lo sea la tercera, lo que contradice a lo supuesto de que rg $B=2$.

CUARTO CASO. rg $A=$rg $B=1$. El sistema es compatible e indeterminado. Toda solución de la primera ecuación lo es de las otras dos, luego las tres rectas coinciden.

Sean ahora dos rectas secantes

$$r\equiv a\,x_1+b\,x_2+c\,=0$$
$$s\equiv a'x_1+b'x_2+c'=0$$

La expresión

$$\lambda(ax_1+bx_2+c)+\mu(a'x_1+b'x_2+c')=0 \tag{11}$$

para un par de valores reales (no simultáneamente nulos) de λ y μ representa una recta que pasa por el punto común a r y s. En efecto, cualesquiera que sean los valores de λ y μ, las coordenadas del punto común a r y s verifican las ecuaciones de dichas rectas, luego anulan a los dos paréntesis de (11). Por tanto, si se considera a λ y μ como parámetros variables, (11) representa la ecuación del haz de rectas de vértice la intersección de las rectas r y s.

Los parámetros λ y μ de (11) se llaman *coordenadas homogéneas* de las rectas del haz respecto a la base formada por las rectas r y s.

Las coordenadas de r y s en el haz que ellas determinan son $(1, 0)$ y $(0, 1)$, respectivamente. Obsérvese que si (λ, μ) son las coordenadas homogéneas de una recta del haz $(k\lambda, k\mu)$ también lo son para todo valor real de k distinto de cero. Se puede prescindir de uno de los parámetros, el λ por ejemplo, dividiendo (11) por él y llamando ρ a $\frac{\mu}{\lambda}$, con lo que la ecuación del haz quedaría en la forma

$$ax_1 + bx_2 + c + \rho(a'x_1 + b'x_2 + c') = 0. \tag{11'}$$

Realmente (11') no representa todo el haz, pues no existe ningún valor real de ρ que nos dé la recta s. Esto es consecuencia de que para llegar a (11') hemos dividido (11) por λ y esto es correcto salvo cuando $\lambda = 0$, pero éste es el valor que toma λ para la recta s.

El hecho de que todas las rectas del haz, salvo una, se obtienen dando todos los valores reales a un solo parámetro se expresa diciendo que un haz de rectas contiene una *simple infinidad* de rectas.

Si en la expresión $ax_1 + bx_2 + c = 0$ damos a los coeficientes a y b valores fijos y consideramos c como un parámetro variable, la expresión representa el conjunto de todas las rectas paralelas al vector $(b, -a)$. A este conjunto se le llama *haz impropio* de rectas.

EJEMPLO 2. Las rectas

$$\begin{aligned} r &\equiv \quad 6x_1 - 4x_2 + 2 = 0 \\ s &\equiv -3x_1 + 2x_2 + 4 = 0 \end{aligned}$$

son paralelas, pues

$$\frac{6}{-3} = \frac{-4}{2} \neq \frac{2}{4}.$$

EJEMPLO 3. Ecuación de la recta que pasa por el punto $P\ (3, -2)$ y por el $Q = r_1 \cap r_2$ siendo

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv 2x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ r_2 &\equiv \quad x_1 - x_2 + 4 = 0. \end{aligned}$$

Hallamos primero la ecuación de todas las rectas que pasan por Q, son

$$\lambda(2x_1 + x_2 - 3) + \mu(x_1 - x_2 + 4) = 0$$

Para hallar la recta que nos interesa, imponemos que pase por P,

$$\lambda(2 \cdot 3 - 2 - 3) + \mu(3 + 2 + 4) = 0$$

de donde $\lambda+9\mu=0$, luego para $\lambda=9$, $\mu=-1$ obtenemos:

$$17x_1+10x_2-31=0.$$

EJEMPLO 4. Recta paralela a la $r\equiv 3x_1+4x_2-5=0$ por el punto $P\,(-4,\,2)$. El haz impropio de rectas

$$3x_1+4x_2+\lambda=0$$

contiene a la recta pedida. Obligando a que pase por P

$$3(-4)+4\cdot 2+\lambda=0$$

obtenemos $\lambda=4$. Luego

$$3x_1+4x_2+4=0$$

es la solución.

EJEMPLO 5. Recta paralela a la $r\equiv x_1-4x_2+5=0$ por el punto $P\,(3,\,-2)$.

La ecuación de todas las rectas que pasan por P es

$$\lambda(x_1-3)+\mu(x_2+2)=0$$

Para que sea paralela a r, se tiene que verificar

$$\frac{\lambda}{1}=\frac{\mu}{-4}$$

luego

$$x_1-4x_2-11=0$$

es la recta pedida.

EJERCICIOS

1. Dígase si la recta

$$r\equiv 2x_1+x_2-2=0$$

pertenece o no al haz de rectas determinado por las

$$s\equiv x_1+2x_2\quad=0$$
$$t\equiv x_1-\ x_2-2=0$$

y caso afirmativo, hallar sus coordenadas en el mismo.

2. Hállese la posición relativa de las rectas

$$r\equiv x_1-2x_2+3=0$$
$$s\equiv\quad\ x_2+2=0$$
$$t\equiv x_1-\ x_2+4=0$$

3. Dadas las rectas $r \equiv x_1 - 2x_2 + 4 = 0$, $s \equiv x_1 + x_2 - 1 = 0$ y el punto P (2, −3). Hállense: 1.º, ecuaciones de los haces de vértices $r \cap s$ y P; 2.º, recta común a ambos; 3.º, recta del primer haz que pasa por el punto Q (−1, 2); 4.º, recta del segundo haz con vector de dirección el (4, −2), y 5.º, intersección de las dos últimas rectas.

4. Demuéstrese que si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son tales que las rectas AA', BB' y CC' se cortan en un mismo punto O, los puntos $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$, $BC \cap B'C'$ están alineados.

5. Hállense las ecuaciones del cambio de sistema de referencia cuando se toma como segundo sistema el que tiene por origen la intersección O de las rectas

$$r \equiv x_1 - x_2 + 1 = 0$$
$$s \equiv x_1 + x_2 = 0$$

y por nuevos vectores básicos los $\{\overrightarrow{OA}\}$ y $\{\overrightarrow{OB}\}$ siendo $A = r \cap t$, $B = s \cap t$ y

$$t \equiv 2x_1 - 3x_2 = 0.$$

6. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son los P (2, −1), Q (4, 1) y R (−1, 4). Hállese el cuarto vértice y el punto de intersección de sus diagonales.

7. Hállese la ecuación vectorial de la recta r respecto al sistema de referencia $\{\bar{O};\ \bar{\mathbf{u}}_1,\ \bar{\mathbf{u}}_2\}$ sabiendo que su ecuación respecto al sistema $\{O;\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2\}$ es

$$\mathbf{x} = (3,\ 1) + \lambda(2,\ -3)$$

y que la ecuación matricial del cambio de sistema de referencia es:

$$\bar{X} = X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

8. Se llama aplicación afín de E_2 a toda aplicación de E_2 en sí mismo dada por ecuaciones de la forma

$$y_1 = a_{01} + a_{11}x_1 + a_{21}x_2$$
$$y_2 = a_{02} + a_{12}x_1 + a_{22}x_2$$

Demuéstrese:

1.º que el resultado de componer dos aplicaciones afines es otra aplicación afín,

2.º que las aplicaciones afines biyectivas forman grupo.

9. Una aplicación afín de E_2 en sí mismo aplica los puntos P (3, 2), Q (1, 0) y R (−1, 2) en los P' (1, 1), Q' (−2, 4) y R' (3, 3), respectivamente. Hállese:

1.º ecuaciones de la aplicación afín,

2.º puntos invariantes,

3.º transformada de la recta $2x_1 - x_2 + 3 = 0$,
4.º rectas invariantes.

10. Hállense las proyecciones del punto P (3, 2) sobre las rectas

$$r \equiv x_1 + 2x_2 - 5 = 0$$
$$s \equiv 3x_1 - 5x_2 + 3 = 0$$

paralelamente a la recta $\dfrac{x_1 - 3}{2} = \dfrac{3x_2 - 5}{6}$ y dígase si los puntos hallados están alineados con el Q (1, -4).

JAR'23

14

geometría afín del espacio

En el presente capítulo vamos a efectuar un estudio del espacio, análogo al estudio del plano realizado en el capítulo anterior. Como veremos son muchas las analogías y en la mayor parte de los casos repetiremos los mismos razonamientos, con la pequeña molestia adicional correspondiente al aumento en una unidad de la dimensión.

14.1. Espacio afín. Coordenadas en el espacio afín.

Como en el caso del plano, vamos a manejar simultáneamente dos conjuntos: uno de puntos (el espacio ordinario E_3) y otro de vectores (el espacio vectorial V_3 de los vectores libres del espacio). Ambos conjuntos están relacionados por la aplicación φ: $E_3 \times E_3 \longrightarrow V_3$, dada por

$$\varphi(P,\ Q) = \{\overrightarrow{PQ}\},$$

la cual verifica las propiedades A_1, A_2 y A_3 reseñadas en [13.1].

Diremos que E_3 es el *espacio afín* asociado al espacio vectorial V_3.

Un *sistema de referencia* en E_3 es el conjunto $\{O;\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3\}$ formado por un punto fijo O de E_3, al que llamaremos *origen* del sistema y tres vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ de una base de V_3.

A todo punto X de E_3 le podemos asociar un único vector libre: el $\{\overrightarrow{OP}\}$ que tiene como origen el del sistema de referencia elegido y por extremo el punto X. A dicho vector libre le llamaremos *vector de posición* del punto X respecto al origen O.

Fijado el sistema de referencia $\{O;\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3\}$ vamos a definir una aplicación biyectiva de E_3 en R^3. Consideremos las aplicaciones

$$\psi\colon\ E_3 \longrightarrow V_3 \quad \text{y} \quad \tau\colon\ V_3 \longrightarrow R^3$$

dadas por

$$\psi(X) = \{\overrightarrow{OX}\}$$

y

$$\tau(\{\overrightarrow{OX}\}) = \tau(x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{u}_3) = (x_1,\ x_2,\ x_3).$$

Se comprueba fácilmente que las dos son biyectivas, luego su producto $\tau \circ \psi$ también lo es y es justamente la aplicación que buscábamos:

$$\tau \circ \psi(X) = (x_1,\ x_2,\ x_3).$$

Obsérvese que ψ depende del origen O elegido y τ de la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ escogida en V_3, luego, en definitiva, $\tau \circ \psi$ depende del sistema de referencia $\{O;\ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

A los tres números reales x_1, x_2, x_3 que hemos asociado mediante este procedimiento al punto X les llamaremos coordenadas de X respecto al sistema de referencia $\{O;\ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

Si $\{\bar{O};\ \bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{u}}_3\}$ es otro sistema de referencia en E_3 tal que las coordenadas de $\bar{O}$ respecto al sistema de referencia original son a_{o1}, a_{o2}, a_{o3}, las coordenadas del vector $\bar{\mathbf{u}}_i$ respecto a la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ son a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} y llamamos $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ a las coordenadas del punto X respecto del segundo sistema de referencia, tenemos, en virtud de la propiedad A_3:

$$\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{O\bar{O}}\} + \{\overrightarrow{\bar{O}X}\}$$

de donde, utilizando la definición de coordenadas de un punto

$$\sum_{i=1}^{3} x_i\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{3} a_{oi}\mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{3} \bar{x}_j\bar{\mathbf{u}}_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_{oi}\mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{3} \bar{x}_j \left(\sum_{i=1}^{3} a_{ji}\mathbf{u}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_{oi}\mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} a_j\bar{x}_j \right) \mathbf{u}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left(a_{oi} + \sum_{j=1}^{3} a_{ji}\bar{x}_j \right) \mathbf{u}_i$$

luego, teniendo en cuenta la independencia lineal de los vectores

$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ nos queda

$$(12)\qquad \begin{aligned} x_1 &= a_{o1} + a_{11}\bar{x}_1 + a_{21}\bar{x}_2 + a_{31}\bar{x}_3 \\ x_2 &= a_{o2} + a_{12}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + a_{32}\bar{x}_3 \\ x_3 &= a_{o3} + a_{13}\bar{x}_1 + a_{23}\bar{x}_2 + a_{33}\bar{x}_3 \end{aligned}$$

que son las fórmulas de cambio de sistema de referencia en el espacio, las cuales admiten la siguiente representación matricial:

$$(12')\qquad X = \bar{X}A$$

donde

$$X = (1 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3), \qquad \bar{X} = (1 \quad \bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 \quad \bar{x}_3)$$

y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{o1} & a_{o2} & a_{o3} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ahora bien, A es regular, pues

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

ya que las filas de la matriz correspondiente al último determinante son las coordenadas de los vectores $\bar{\mathbf{u}}_1$, $\bar{\mathbf{u}}_2$, $\bar{\mathbf{u}}_3$, los cuales, por hipótesis, son linealmente independientes. Existe, por tanto, la matriz A^{-1}. Multiplicando ambos miembros de (12') por la derecha por A^{-1}, obtenemos:

$$(12'')\qquad \bar{X} = XA^{-1}.$$

EJERCICIOS

1. Hállense las fórmulas de cambio de sistema de referencia respecto a los sistemas $\{O;\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3\}$ y $\{\bar{O};\ \bar{\mathbf{u}}_1,\ \bar{\mathbf{u}}_2,\ \bar{\mathbf{u}}_3\}$ siendo $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{u}_2 = 3\mathbf{e}_1$, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\bar{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\bar{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\bar{\mathbf{u}}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ y $\{\overrightarrow{O\bar{O}}\} = \mathbf{e}_1$.

2. Las coordenadas de los puntos P, Q y R respecto al sistema de referencia $\{O;\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3\}$ son (3, 1, 1), (0, 1, 2) y (1, 1, 0), respectivamente, y respecto al $\{\bar{O};\ \bar{\mathbf{u}}_1,\ \bar{\mathbf{u}}_2,\ \bar{\mathbf{u}}_3\}$ son (9, 3, 4), (6, 1, 5) y (2, 1, 2). Hállense las fórmulas de cambio de sistema de referencia y las componentes del vector $\{\overrightarrow{O\bar{O}}\}$ respecto a la base $\{\bar{\mathbf{u}}_1,\ \bar{\mathbf{u}}_2,\ \bar{\mathbf{u}}_3\}$. Sabiendo además que el punto I (0, 0, 1) tiene esas coordenadas respecto a ambos sistemas.

14.2. Ecuación vectorial del plano. Ecuaciones paramétricas.

Sabemos por Geometría elemental que un plano está determinado por tres puntos no alineados. Sean éstos P, Q y R y $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ y $\mathbf{r}$ sus vectores de posición respecto del origen del sistema de referencia $\{O;\ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Si X es un punto cualquiera del plano y $\mathbf{x}$ su vector de posición, tenemos, en virtud de A_3:

$$\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OP}\} + \{\overrightarrow{PX}\}$$

Ahora bien, los vectores $\{\overrightarrow{PQ}\}$, $\{\overrightarrow{PR}\}$ y $\{\overrightarrow{PX}\}$ son coplanarios, y por la forma en que se han tomado los puntos P, Q y R, los dos primeros son linealmente independientes, luego por el teorema 1 de [7.1], $\{\overrightarrow{PX}\}$ depende linealmente de $\{\overrightarrow{PQ}\}$ y $\{\overrightarrow{PR}\}$. Podemos, pues, escribir:

$$\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OP}\} + \lambda\{\overrightarrow{PQ}\} + \mu\{\overrightarrow{PR}\}$$

pero nuevamente por la propiedad A_3:

$$\{\overrightarrow{PQ}\} = \{\overrightarrow{OQ}\} - \{\overrightarrow{OP}\}$$

y

$$\{\overrightarrow{PR}\} = \{\overrightarrow{OR}\} - \{\overrightarrow{OP}\}$$

por tanto,

$$\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OP}\} + \lambda(\{\overrightarrow{OQ}\} - \{\overrightarrow{OP}\}) + \mu(\{\overrightarrow{OR}\} - \{\overrightarrow{OP}\})$$

o, con notación más breve

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + \mu(\mathbf{r} - \mathbf{p}) \tag{13}$$

que es la condición que deben cumplir los vectores de posición de todos los puntos del plano determinado por los puntos P, Q y R.

Pero, recíprocamente, si el vector de posición de un punto X verifica (13), tenemos

$$\{\overrightarrow{OX}\} - \{\overrightarrow{OP}\} = \lambda(\{\overrightarrow{OQ}\} - \{\overrightarrow{OP}\}) + \mu(\{\overrightarrow{OR}\} - \{\overrightarrow{OP}\})$$

de donde

$$\{\overrightarrow{PX}\} = \lambda\{\overrightarrow{PQ}\} + \mu\{\overrightarrow{PR}\}$$

lo que nos dice que los vectores libres $\{\overrightarrow{PX}\}$, $\{\overrightarrow{PQ}\}$ y $\{\overrightarrow{PR}\}$ son coplanarios, luego como $\overrightarrow{PX}$, $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ tienen su origen P común, los

cuatro puntos P, Q, R, X están en el mismo plano, es decir, los únicos puntos de E_3 que cumplen la ecuación vectorial (13) son los del plano determinado por P, Q y R. Podemos afirmar que (13) es la ecuación vectorial de dicho plano. A la variedad lineal engendrada por los vectores $\mathbf{q}-\mathbf{p}$ y $\mathbf{r}-\mathbf{p}$ se le llama *variedad de dirección* del plano.

La ecuación (13) es equivalente a las tres ecuaciones escalares siguientes:

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + \lambda(q_1 - p_1) + \mu(r_1 - p_1) \\ x_2 &= p_2 + \lambda(q_2 - p_2) + \mu(r_2 - p_2) \\ x_3 &= p_3 + \lambda(q_3 - p_3) + \mu(r_3 - p_3) \end{aligned} \tag{14}$$

que son las ecuaciones paramétricas del plano.

Para hallar puntos del plano determinado por las ecuaciones paramétricas (14) bastará que demos valores reales a los parámetros λ y μ. En el lenguaje intuitivo que empezamos a emplear en el capítulo anterior, diremos que un plano se compone de una *doble infinida de puntos.*

Que el punto $S\ (s_1, s_2, s_3)$ pertenezca o no al plano anterior es equivalente a que el sistema lineal de ecuaciones en λ y μ siguiente:

$$\begin{aligned} (q_1 - p_1)\lambda + (r_1 - p_1)\mu &= s_1 - p_1 \\ (q_2 - p_2)\lambda + (r_2 - p_2)\mu &= s_2 - p_2 \\ (q_3 - p_3)\lambda + (r_3 - p_3)\mu &= s_3 - p_3 \end{aligned}$$

sea compatible o no y, a su vez, esto es equivalente a que el vector $\mathbf{s}-\mathbf{p}$ pertenezca o no a la variedad lineal de dirección del plano.

EJEMPLO 1. La ecuación vectorial del plano π determinado por los puntos $P\ (2, 1, 0)$, $Q\ (3, 2, 1)$ y $R\ (-1, 4, 5)$ es

$$\mathbf{x} = (2, 1, 0) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(-3, 3, 5)$$

y sus ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + \lambda - 3\mu \\ x_2 &= 1 + \lambda + 3\mu \\ x_3 &= \quad \lambda + 5\mu \end{aligned}$$

los puntos $S\ (0, 5, 6)$ y $T\ (1, 6, 7)$ pertenecen a π y se han obtenido dando a λ y μ los valores $(1, 1)$ y $(2, 1)$, respectivamente.

El punto $M\ (4, -2, 7)$ no pertenece a π, pues el vector $(4-2,$

$-2-1,\ 7-0)$ no pertenece a la variedad de dirección de π, ya que

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \end{vmatrix} \neq 0.$$

CONDICIÓN PARA QUE CUATRO PUNTOS SEAN COPLANARIOS.

De acuerdo con lo que acabamos de ver, para que los puntos P, Q, R y S sean coplanarios o, lo que es lo mismo, para que el punto S pertenezca al plano determinado por los puntos P, Q y R, se tiene que verificar que el vector $\mathbf{s}-\mathbf{p}$ sea combinación lineal de los $\mathbf{q}-\mathbf{p}$ y $\mathbf{r}-\mathbf{p}$, pero esto se expresa algebraicamente mediante la condición

$$\begin{vmatrix} q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3 \\ r_1-p_1 & r_2-p_2 & r_3-p_3 \\ s_1-p_1 & s_2-p_2 & s_3-p_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

EJEMPLO 2. Los puntos $P\,(3,\ 2,\ 1)$, $Q\,(-1,\ 4,\ 5)$, $R\,(0,\ 5,\ 6)$ y $S\,(1,\ 6,\ 7)$ son coplanarios, pues

$$\begin{vmatrix} -1-3 & 4-2 & 5-1 \\ 0-3 & 5-2 & 6-1 \\ 1-3 & 6-2 & 7-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

EJERCICIOS

1. Hállese la ecuación vectorial del plano que pasa por el punto $P\ (3,\ -1,\ 2)$ y cuya variedad de dirección tiene la siguiente ecuación no paramétrica

$$x_1+2x_2-x_3=0.$$

2. Hállense las ecuaciones paramétricas del plano que tiene por variedad de dirección la dada por

$$\begin{aligned} x_1&=3\lambda-2\mu \\ x_2&=\ \ +3\mu \\ x_3&=4\lambda-\ \mu \end{aligned}$$

y que contiene al punto $P\ (2,\ 1,\ -2)$.

14.3. Ecuación vectorial de la recta. Ecuaciones paramétricas.

Sea X un punto cualquiera de la recta determinada por los puntos P y Q. En virtud de A_3, tenemos

$$\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OP}\} + \{\overrightarrow{PX}\}$$

pero $\{\overrightarrow{PX}\}$ y $\{\overrightarrow{PQ}\}$ son colineales, luego

$$\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OP}\} + \lambda\{\overrightarrow{PQ}\} = \{\overrightarrow{OP}\} + \lambda(\{\overrightarrow{OQ}\} - \{\overrightarrow{OP}\})$$

y llamando $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ a los vectores de posición de los puntos X, P y Q, respectivamente, relativos al origen O, podemos escribir

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \tag{16}$$

que es la relación que deben cumplir los vectores de posición de los puntos de la recta determinada por P y Q.

Pero, recíprocamente, todo punto X cuyo vector de posición $\mathbf{x}$ verifique la relación (15) pertenece a la recta determinada por P y Q. En efecto, de (16)

$$\mathbf{x} - \mathbf{p} = \lambda(\mathbf{q} - \mathbf{p})$$

luego

$$\{\overrightarrow{PX}\} = \lambda\{\overrightarrow{PQ}\}$$

lo que nos dice que los vectores $\overrightarrow{PX}$ y $\overrightarrow{PQ}$ tienen igual dirección, y como tienen el origen P común, los tres puntos P, Q y X tienen que estar alineados. En definitiva, (16) es la *ecuación vectorial* de la recta determinada por P y Q. La variedad lineal engendrada por el vector $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ se llama *variedad de dirección* de la recta.

Si las coordenadas de los vectores libres $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son (x_1, x_2, x_3), (p_1, p_2, p_3) y (q_1, q_2, q_3), respectivamente, la ecuación vectorial (16) es equivalente a las tres ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + \lambda(q_1 - p_1) \\ x_2 &= p_2 + \lambda(q_2 - p_2) \\ x_3 &= p_3 + \lambda(q_3 - p_3) \end{aligned} \tag{17}$$

que son las *ecuaciones paramétricas* de la recta PQ respecto al sistema de referencia $\{O;\ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

Para obtener puntos de la recta basta dar valores reales al parámetro λ. Entonces, de acuerdo con la terminología convenida, una recta se compone de una simple infinidad de puntos.

Para saber si el punto R pertenece o no a la recta cuyas ecuaciones paramétricas son las (17), habrá que estudiar la compatibilidad del sistema lineal en λ:

$$\begin{aligned} (q_1 - p_1)\lambda &= r_1 - p_1 \\ (q_2 - p_2)\lambda &= r_2 - p_2 \\ (q_3 - p_3)\lambda &= r_3 - p_3 \end{aligned}$$

EJEMPLO 1. La ecuación vectorial de la recta determinada por los puntos $P\,(3,\ -2,\ 1)$ y $Q\,(4,\ 0,\ 6)$ es

$$\mathbf{x} = (3,\ -2,\ 1) + \lambda(1,\ 2,\ 5)$$

y sus ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + \lambda \\ x_2 &= -2 + 2\lambda \\ x_3 &= 1 + 5\lambda \end{aligned}$$

Los puntos $R\,(8,\ 8,\ 26)$, $S\,(1,\ -6,\ -9)$ y $T\,(6,\ 4,\ 16)$ pertenecen a la recta y los hemos hallado dando a λ los valores 5, -2 y 3, respectivamente. El punto (13, 18, 51) pertenece a la recta, pues el sistema

$$\begin{aligned} \lambda &= 13 - 3 = 10 \\ 2\lambda &= 18 + 2 = 20 \\ 5\lambda &= 51 - 1 = 50 \end{aligned}$$

es claramente compatible.

EJERCICIOS

1. Hállense las ecuaciones paramétricas de la recta cuya variedad de dirección viene dada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

y que contiene al punto $P\,(2,\ 2,\ -1)$.

2. ¿Pertenece el punto $P\,(3,\ -2,\ 1)$ a la recta determinada por los $Q\,(2,\ 5,\ 7)$ y $R\,(0,\ 19{,}19)$?

14.4. Posiciones relativas de planos y rectas.

POSICIÓN RELATIVA DE DOS PLANOS.

Sean los planos π y σ dados por sus ecuaciones vectoriales

$$\begin{aligned} \pi &\equiv \mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}' \\ \sigma &\equiv \mathbf{x} = \mathbf{q} + \nu\mathbf{w} + \rho\mathbf{w}' \end{aligned} \tag{18}$$

El problema geométrico de hallar sus puntos comunes es equivalente al problema algebraico de estudiar el sistema de ecuaciones

lineales en λ, μ, ν y ρ que resulta de igualar los segundos miembros de las ecuaciones (18):

$$\mathbf{p}+\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{v}'=\mathbf{q}+\nu\mathbf{w}+\rho\mathbf{w}'$$

es decir,

$$\begin{aligned} v_1\lambda+v_1'\mu-w_1\nu-w_1'\rho&=q_1-p_1\\ v_2\lambda+v_2'\mu-w_2\nu-w_2'\rho&=q_2-p_2\\ v_3\lambda+v_3'\mu-w_3\nu-w_3'\rho&=q_3-p_3 \end{aligned} \tag{19}$$

Llamaremos A y B a la matriz de los coeficientes y a la ampliada con los términos independientes.

Los casos posibles son:

1.° $\operatorname{rg} A=3$. Entonces rango de B tiene que ser también 3. El sistema es compatible e indeterminado. Existen puntos que pertenecen a ambos planos. Supongamos que

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_1' & w_1\\ v_2 & v_2' & w_2\\ v_3 & v_3' & w_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces podemos tomar λ, μ y ν como incógnitas principales. Las soluciones del sistema serán de la forma

$$\begin{aligned} \lambda&=h+h'\rho\\ \mu&=k+k'\rho\\ \nu&=m+m'\rho \end{aligned}$$

siendo h, h', k, k', m y m' números reales perfectamente determinados. Llevando estos valores de λ y μ a las ecuaciones paramétricas de π o, lo que es más cómodo, el valor de ν en función de ρ a las ecuaciones paramétricas del plano σ, obtendremos:

$$\begin{aligned} x_1&=(q_1+mw_1)+(m'w_1+w_1')\rho\\ x_2&=(q_2+mw_2)+(m'w_2+w_2')\rho\\ x_3&=(q_3+mw_3)+(m'w_3+w_3')\rho \end{aligned}$$

que nos darían, al variar ρ, las coordenadas de todos los puntos comunes a ambos planos. Pero las anteriores son las ecuaciones paramétricas de una recta, luego ambos planos se cortan en una recta.

2.° $\operatorname{rg} A=2$, $\operatorname{rg} B=3$. El sistema es incompatible. Los planos π y σ no tienen puntos comunes, es decir, son paralelos.

Obsérvese que, por ser los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}'$ linealmente independientes por hipótesis, $\operatorname{rg} A=2$ implica que $\mathbf{w}$ y $\mathbf{w}'$ dependen linealmente de los $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}'$, luego las variedades de dirección de ambos

planos coinciden. Por otra parte, rg $B=3$ implica que el vector $\mathbf{q}-\mathbf{p}$ no pertenece a dicha variedad de dirección común.

3.° rg $A=$rg $B=2$. El sistema es compatible e indeterminado. Existen puntos comunes a ambos planos. Como en el caso anterior, rg $A=2$ implica que las dos variedades de dirección coinciden. Pero, en este caso, por ser rg $B=2$, el vector $\mathbf{q}-\mathbf{p}$ pertenece a dicha variedad, luego los dos planos coinciden.

EJEMPLO 1. Los planos

$$\pi \equiv \mathbf{x}=(3,\ 2,\ 4)+\lambda(1,\ -1,\ 1)+\mu(2,\ 0,\ -1)$$
$$\sigma \equiv \mathbf{x}=(1,\ 0,\ 0)+\nu(0,\ 2,\ 1)+\rho(1,\ -1,\ 4)$$

se cortan en una recta, pues

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}=3$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} \lambda+2\mu \quad &- \rho=-2 \\ -\lambda \quad &-2\nu+\rho=-2 \\ \lambda-\mu-\nu &-4\rho=-4 \end{aligned}$$

obtenemos

$$\lambda=-2+\frac{10}{4}\rho, \quad \mu=-\frac{3}{4}\rho, \quad \nu=2-\frac{3}{4}\rho$$

luego la ecuación vectorial de la recta intersección es

$$\mathbf{x}=(1,\ 4,\ 2)+\rho\left(1,\ \frac{-5}{2},\ \frac{13}{4}\right).$$

EJEMPLO 2. Los planos

$$\pi \equiv \mathbf{x}=(1,\ -1,\ 0)+\lambda(3,\ 1,\ 1)+\mu(2,\ 0,\ 1)$$
$$\sigma \equiv \mathbf{x}=(0,\ 1,\ 0)+\nu(5,\ 1,\ 2)+\rho(1,\ 1,\ 0)$$

son paralelos, pues

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}=2 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0-1 \\ 1 & 0 & 1-(-1) \\ 1 & 1 & 0-0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

POSICIÓN RELATIVA DE UN PLANO Y UNA RECTA.

Sea la recta

$$r \equiv \mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{v}$$

y el plano

$$\pi \equiv \mathbf{x} = \mathbf{q} + \mu \mathbf{w} + \nu \mathbf{u}$$

El problema geométrico de hallar sus puntos comunes es equivalente al problema algebraico de resolver el sistema lineal

$$\begin{aligned} v_1\lambda - w_1\mu - u_1\nu &= q_1 - p_1 \\ v_2\lambda - w_2\mu - u_2\nu &= q_2 - p_2 \\ v_3\lambda - w_3\mu - u_3\nu &= q_3 - p_3 \end{aligned}$$

Sean $A = \begin{pmatrix} v_1 & -w_1 & -u_1 \\ v_2 & -w_2 & -u_2 \\ v_3 & -w_3 & -u_3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} v_1 & -w_1 & -u_1 & q_1 - p_1 \\ v_2 & -w_2 & -u_2 & q_2 - p_2 \\ v_3 & -w_3 & -u_3 & q_3 - p_3 \end{pmatrix}$

Pueden ocurrir los siguientes casos:

1.° $\operatorname{rg} A = 3$. El sistema es compatible y determinado. Existe un único punto común al plano y a la recta.

Obsérvese que $\operatorname{rg} A = 3$ implica que la variedad de dirección de la recta no está contenida en la variedad de dirección del plano, luego ambas variedades lineales son suplementarias.

2.° $\operatorname{rg} A = 2$, $\operatorname{rg} B = 3$. El sistema es incompatible. No existe punto común al plano y a la recta, luego la recta es paralela al plano.

Puesto que los vectores $\mathbf{w}$ y $\mathbf{u}$ son linealmente independientes, $\operatorname{rg} A = 2$ implica que $\mathbf{v}$ depende linealmente de ambos o, lo que es igual, la variedad de dirección de la recta está contenida en la variedad de dirección del plano. Por ser $\operatorname{rg} B = 3$, el vector $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ no pertenece a esta última variedad.

3.° $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2$. El sistema es compatible e indeterminado. Como en el caso anterior, la variedad de dirección de la recta está contenida en la del plano, pero ahora el vector $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ pertenece a la última variedad, luego la recta está contenida en el plano.

EJEMPLO 3. El plano

$$\pi \equiv \mathbf{x} = (3,\ 2,\ -2) + \lambda(1,\ 0,\ 1) + \mu(0,\ 2,\ -3)$$

y la recta

$$r \equiv \mathbf{x} = (1,\ 2,\ -1) + \rho(2,\ 0,\ 3)$$

se cortan, pues

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} \lambda \quad & -2\rho = -2 \\ 2\mu \quad & = 0 \\ \lambda - 3\mu - 3\rho & = 1 \end{aligned}$$

obtenemos $\lambda = -8$, $\mu = 0$, $\rho = -3$, luego el punto común es el

$$(-5,\ 2,\ -10).$$

EJEMPLO 4. El plano

$$\pi \equiv \mathbf{x} = (1,\ 2,\ 1) + \lambda(3,\ -3,\ 1) + \mu(0,\ 2,\ 5)$$

y la recta

$$r \equiv \mathbf{x} = (0,\ 1,\ -1) + \rho(3,\ -1,\ 6)$$

son paralelas, pues

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0-1 \\ -3 & 2 & 1-2 \\ 1 & 5 & -1-1 \end{vmatrix} \neq 0$$

POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS.

El problema geométrico de hallar los puntos comunes a las rectas

$$\begin{aligned} r &\equiv \mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{v} \\ s &\equiv \mathbf{x} = \mathbf{q} + \mu\mathbf{w} \end{aligned}$$

es equivalente al problema algebraico de hallar las soluciones del sistema lineal

$$\begin{aligned} v_1\lambda - w_1\mu &= q_1 - p_1 \\ v_2\lambda - w_2\mu &= q_2 - p_2 \\ v_3\lambda - w_3\mu &= q_3 - p_3 \end{aligned}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} v_1 & -w_1 \\ v_2 & -w_2 \\ v_3 & -w_3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} v_1 & -w_1 & q_1 - p_1 \\ v_2 & -w_2 & q_2 - p_2 \\ v_3 & -w_3 & q_3 - p_3 \end{pmatrix}$

los casos posibles son:

1.° $\operatorname{rg} A = 2$, $\operatorname{rg} B = 3$. El sistema es incompatible. No existe

punto común a ambas rectas. Por ser $\operatorname{rg} A=2$, las variedades de dirección de r y s son distintas. Por ser $\operatorname{rg} B=3$, los vectores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{q}-\mathbf{p}$ no son coplanarios. Las dos rectas se cruzan.

2.° $\operatorname{rg} A=\operatorname{rg} B=2$. El sistema es compatible y determinado. Existe un único punto común a las dos rectas. Por ser $\operatorname{rg} A=2$, las dos variedades de dirección son distintas. Las dos rectas se cortan.

3.° $\operatorname{rg} A=1$, $\operatorname{rg} B=2$. El sistema es incompatible. Las dos rectas carecen de puntos comunes. El hecho de ser $\operatorname{rg} A=1$ implica que las dos variedades de dirección coinciden, y por ser $\operatorname{rg} B=2$, el vector $\mathbf{q}-\mathbf{p}$ no pertenece a dicha variedad. Las rectas son paralelas.

4.° $\operatorname{rg} A=\operatorname{rg} B=1$. El sistema es compatible e indeterminado. Existen puntos comunes. Por ser $\operatorname{rg} A=1$, las dos variedades de dirección son la misma, y por ser $\operatorname{rg} B=1$, el vector $\mathbf{q}-\mathbf{p}$ pertenece a dicha variedad, luego las dos rectas coinciden.

EJEMPLO 5. Las rectas

$$r\equiv \mathbf{x}=(3,\ 2,\ 1)+\lambda(1,\ 3,\ 6)$$
$$s\equiv \mathbf{x}=(-2,\ 2,\ 10)+\mu(4,\ 2,\ -2)$$

se cortan, pues

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\\ 6 & -2\end{pmatrix}=2 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix}1 & 4 & -2-3\\ 3 & 2 & 2-2\\ 6 & -2 & 10-1\end{vmatrix}=0$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned}\lambda-4\mu&=-5\\ 3\lambda-2\mu&=\ \ 0\\ 6\lambda+2\mu&=\ \ 9\end{aligned}$$

obtenemos $\lambda=1$, valor que llevado a la ecuación de r nos da el punto común

$$(4,\ 5,\ 7).$$

EJEMPLO 6. Las rectas

$$r\equiv \mathbf{x}=(2,\ 1,\ -1)+\lambda(2,\ 0,\ 2)$$
$$s\equiv \mathbf{x}=(1,\ 0,\ 3)+\mu(1,\ 1,\ 1)$$

se cruzan, pues

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & 1-2\\ 0 & 1 & 0-1\\ 2 & 1 & 3-(-1)\end{vmatrix}\neq 0.$$

EJERCICIOS

1. Hállense las ecuaciones paramétricas de la recta paralela a los planos

$$\pi \equiv \mathbf{x} = (2, -1, 1) + \lambda(3, 1, 2) + \mu(0, 1, 0)$$
$$\sigma \equiv \mathbf{x} = (1, 0, 1) + \lambda(0, 2, -1) + \mu(1, 1, 0)$$

por el punto P $(3, -1, 1)$.

2. Hállese la ecuación vectorial del plano que pasa por la recta

$$\mathbf{x} = (2, 1, 1) + \lambda(2, 0, 1)$$

y por el punto P $(2, 0, 2)$.

3. Hállense las ecuaciones paramétricas del plano paralelo a las rectas

$$r \equiv \mathbf{x} = (2, 1, 0) + \lambda(3, 3, 1)$$
$$s \equiv \mathbf{x} = (1, 0, 0) + \lambda(4, 3, -1)$$

por el punto P $(1, 1, -1)$.

4. Hállese la ecuación vectorial del plano paralelo a la recta

$$r \equiv \mathbf{x} = (2, 1, 1) + \lambda(3, 0, -3)$$

que pasa por los puntos P $(3, 1, 1)$ y Q $(0, 1, 0)$.

5. Hállese una recta que se apoye en las

$$r \equiv \mathbf{x} = (2, 1, -1) + \lambda(3, 0, 1)$$
$$s \equiv \mathbf{x} = (4, 1, -1) + \lambda(2, 2, 1)$$

y sea paralela a los planos

$$\pi \equiv \mathbf{x} = (0, 1, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(0, 1, 0)$$
$$\sigma \equiv \mathbf{x} = (1, 1, 1) + \lambda(0, 2, 1) + \mu(1, 0, 0).$$

6. Hállese la posición relativa de los planos

$$\pi_1 \equiv \mathbf{x} = (3, 2, -1) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(1, 0, 1)$$
$$\pi_2 \equiv \mathbf{x} = (5, 3, 1) + \lambda(-2, -1, 0) + \mu(0, -1, 0)$$
$$\pi_3 \equiv \mathbf{x} = \lambda(4, 4, 1) + \mu(0, 1, 0)$$

7. Hállese la recta determinada por las proyecciones del punto $P(3, 2, 1)$ sobre las rectas

$$r \equiv \mathbf{x} = (2, 0, -1) + \lambda(4, 1, 1)$$
$$s \equiv \mathbf{x} = (1, -1, 0) + \lambda(2, 0, 1)$$

paralelamente al plano

$$\pi \equiv \mathbf{x} = \lambda(2, 1, -1) + \mu(1, 0, 2).$$

8. Posición relativa de las rectas r, determinada por los puntos P (2, 4, 6) y Q (−1, −1, 1) y la $s=\pi_1 \cap \pi_2$, siendo

$$\pi_1 \equiv \mathbf{x}=(4,\ 1,\ 0)+\lambda(2,\ 2,\ 2)+\mu(0,\ 0,\ 1)$$
$$\pi_2 \equiv \mathbf{x}=\qquad\qquad \lambda(1,\ 0,\ 1)+\mu(0,\ 1,\ 0).$$

9. Posición relativa del plano π paralelo a las rectas

$$r \equiv \mathbf{x}=(1,\ 1,\ 1)+\lambda(2,\ 1,\ -1) \quad \text{y} \quad s \equiv \mathbf{x}=\lambda(3,\ 0,\ 1)$$

por el origen y de la recta t, determinada por los puntos P (1, 1, 1), Q (0, 2, −1).

10. Hállese la ecuación vectorial del plano determinado por las proyecciones del punto P (0, −1, 2) sobre los planos

$$\pi \equiv \mathbf{x}=(1,\ 0,\ 1)+\lambda(0,\ 1,\ 0)+\mu(1,\ 1,\ 1)$$
$$\sigma \equiv \mathbf{x}=(0,\ 0,\ 1)+\lambda(3,\ 1,\ 1)+\mu(2,\ 0,\ 1)$$

paralelamente a la recta

$$r \equiv \mathbf{x}=(2,\ 1,\ -2)+\lambda(1,\ 0,\ -1)$$

y que pasa por el origen.

14.5. Ecuación general del plano. Posiciones relativas de planos.

Sean

$$\text{(20)} \qquad \begin{aligned} x_1 &= p_1 + v_1\lambda + w_1\mu \\ x_2 &= p_2 + v_2\lambda + w_2\mu \\ x_3 &= p_3 + v_3\lambda + w_3\mu \end{aligned}$$

las ecuaciones paramétricas del plano π que pasa por el punto $P\cdot(p_1, p_2, p_3)$ y cuya variedad de dirección es la engendrada por los vectores (v_1, v_2, v_3) y (w_1, w_2, w_3). Si suponemos que (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas de un punto del plano, el sistema lineal en λ y μ (20) tiene que ser compatible y determinado, luego

$$\text{(21)} \qquad \begin{vmatrix} x_1-p_1 & v_1 & w_1 \\ x_2-p_2 & v_2 & w_2 \\ x_3-p_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Podemos, pues, considerar (21) como la ecuación del plano. Desarrollando el determinante por los elementos de la primera columna, obtenemos

$$(v_2w_3-v_3w_2)(x_1-p_1)+(v_3w_1-v_1w_3)(x_2-p_2)+\cdot$$
$$+(v_1w_2-v_2w_1)(x_3-p_3)=0$$

y, en definitiva,

$$ax_1+bx_2+cx_3+d=0 \tag{22}$$

que es la condición que deben cumplir las coordenadas de los puntos del plano π.

Supongamos que las coordenadas de un punto X verifican (22). Sean P, Q y R tres puntos no alineados cuyas coordenadas verifican la ecuación (22) (esto es siempre posible, pues si, por ejemplo, es x_1 incógnita principal del sistema (22),

$$\left(-\frac{d}{a},\ 0,\ 0\right),\quad \left(-\frac{b+d}{a},\ 1,\ 0\right)\quad \text{y}\quad \left(-\frac{c+d}{a},\ 0,\ 1\right)$$

son soluciones y los puntos que tienen estas coordenadas no están alineados, ya que los vectores

$$\left(-\frac{b}{a},\ 1,\ 0\right)\quad \text{y}\quad \left(-\frac{c}{a},\ 0,\ 1\right)$$

no son proporcionales), entonces

$$\begin{aligned}
a(x_1-p_1)+b(x_2-p_2)+c(x_3-p_3)&=0\\
a(q_1-p_1)+b(q_2-p_2)+c(q_3-p_3)&=0\\
a(r_1-p_1)+b(r_2-p_2)+c(r_3-p_3)&=0
\end{aligned}$$

pero esto equivale a decir que el sistema

$$\begin{aligned}
(x_1-p_1)x+(x_2-p_2)y+(x_3-p_3)z&=0\\
(q_1-p_1)x+(q_2-p_2)y+(x_3-p_3)z&=0\\
(r_1-p_1)x+(r_2-p_2)y+(r_3-p_3)z&=0
\end{aligned}$$

es compatible, de donde

$$\begin{vmatrix} x_1-p_1 & x_2-p_2 & x_3-p_3\\ q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3\\ r_1-p_1 & r_2-p_2 & r_3-p_3 \end{vmatrix}=0$$

pero de acuerdo con (15), ésta es la condición que deben cumplir las coordenadas del punto X para que éste pertenezca al plano determinado por P, Q y R. En definitiva,

$$ax_1+bx_2+cx_3+d=0$$

donde a, b, c y d son números reales no simultáneamente nulos, es la ecuación de un plano. Se llama *ecuación general* del plano.

EJEMPLO 1. Ecuación general del plano π determinado por los puntos $P\,(3,\ 2,\ -1)$, $Q\,(1,\ 0,\ 1)$ y $R\,(2,\ 2,\ 0)$:

$$\begin{vmatrix} x_1-3 & x_2-2 & x_3+1 \\ 1-3 & 0-2 & 1+1 \\ 2-3 & 2-2 & 0+1 \end{vmatrix} = 0$$

de donde

$$x_1 + x_3 - 2 = 0.$$

EJEMPLO 2. Los puntos $P\,(3,\ 2,\ 1)$, $Q\,(4,\ 3,\ 6)$, $R\,(-1,\ 2,\ 7)$ y $S\,(8,\ 3,\ 0)$ ¿son coplanarios?

$$\begin{vmatrix} 4-3 & 3-2 & 6-1 \\ -1-3 & 2-2 & 7-1 \\ 8-3 & 3-2 & 0-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

luego sí son coplanarios.

RADIACIÓN DE PLANOS.

Al conjunto de todos los planos que pasan por un punto P se le llama radiación de planos de vértice P.

Si el plano

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \tag{23}$$

pasa por el punto $P\,(p_1,\ p_2,\ p_3)$, entonces

$$ap_1 + bp_2 + cp_3 + d = 0. \tag{24}$$

Restando miembro a miembro ambas igualdades nos queda

$$a(x_1 - p_1) + b(x_2 - p_2) + c(x_3 - p_3) = 0 \tag{25}$$

Si consideramos a, b y c como parámetros variables, la expresión (25) representa la ecuación de la radiación de planos de vértice P. Como los tres parámetros no pueden ser simultáneamente nulos, siempre podemos dividir por uno de ellos, con lo que nos quedan sólo dos parámetros fundamentales, luego una radiación de planos es una doble infinidad de planos.

HAZ DE PLANOS.

Al conjunto de planos que pasan por una recta r se le llama haz de planos de arista r.

Supongamos que r está determinada por los puntos P y Q, en-

tonces si el plano (23) pertenece al haz de planos de arista r, pasa por P, con lo que se tiene que verificar (24), y por Q, luego

$$aq_1+bq_2+cq_3+d=0. \tag{26}$$

De (23), (24) y (26) obtenemos (25) y

$$a(q_1-p_1)+b(q_2-p_2)+c(q_3-p_3)=0 \tag{27}$$

despejando de esta última c y llevando el valor obtenido a (25), tenemos

$$a[(x_1-p_1)(q_3-p_3)-(x_3-p_3)(q_1-p_1)]+b[(x_2-p_2)(q_3-p_3)-\\ -(x_3-p_3)(q_2-p_2)]=0$$

que también puede escribirse en la forma:

$$a\begin{vmatrix} x_1 & p_1 & q_1 \\ x_3 & p_3 & q_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} x_2 & p_2 & q_2 \\ x_3 & p_3 & q_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{28}$$

Si a y b se toman como parámetros variables, (28) representa el haz de planos de arista la recta determinada por los puntos P y Q. Como a y b no pueden ser simultáneamente nulos, dividiendo por uno de ellos que no sea cero, nos queda un solo parámetro fundamental, luego el haz de planos se compone de una simple infinidad de planos.

EJEMPLO 3. La ecuación del haz de planos de arista la recta determinada por los puntos P (3, 2, 0) y Q (0, 1, -1) es

$$a\begin{vmatrix} x_1 & 3 & 0 \\ x_3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} x_2 & 2 & 1 \\ x_3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

es decir,

$$a(x_1-3x_3-3)+b(x_2-x_3-2)=0.$$

POSICIÓN RELATIVA DE DOS PLANOS.

Sean los planos

$$\pi_1 \equiv a\,x_1+b\,x_2+c\,x_3+d=0 \quad \text{y} \\ \pi_2 \equiv a'x_1+b'x_2+c'x_3+d'=0. \tag{29}$$

El problema geométrico de hallar los puntos comunes a ambos planos es equivalente al problema algebraico de hallar todas las soluciones del sistema (29).

Sean

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}.$$

Pueden ocurrir los siguientes casos:

1.° $\operatorname{rg} A=2$. El sistema es compatible e indeterminado. Suponiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

es un menor principal, la solución general del sistema es

$$x_1=\frac{bd'-b'd}{ab'-a'b}+\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}\lambda$$

$$x_2=\frac{a'd-ad'}{ab'-a'b}+\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}\lambda$$

$$x_3=\lambda$$

es decir, los puntos comunes a los dos planos son los de la recta que pasa por el punto de coordenadas

$$\left(\frac{bd'-b'd}{ab'-a'b},\ \frac{a'd-ad'}{ab'-a'b},\ 0\right)$$

y uno de cuyos vectores de dirección tiene por coordenadas

$$\left(\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\ \frac{a'c-ac'}{ab'-a'b},\ 1\right)$$

2.° $\operatorname{rg} A=1$, $\operatorname{rg} B=2$. El sistema es incompatible. No existe punto común a ambos planos, luego éstos son paralelos. Obsérvese que $\operatorname{rg} A=1$ implica

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

y esto junto con

$$\operatorname{rg} B=2 \Longrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq\frac{d}{d'}.$$

3.° $\operatorname{rg} A=\operatorname{rg} B=1$. El sistema es compatible e indeterminado. Las soluciones de una de las ecuaciones de (29) son las de la otra, luego los dos planos coinciden. Por ser $\operatorname{rg} B=1$, tenemos que

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}.$$

POSICIÓN RELATIVA DE TRES PLANOS.

Consideremos ahora un tercer plano

$$\pi_3 \equiv a''x_1 + b''x_2 + c''x_3 + d'' = 0. \tag{30}$$

Los puntos comunes a π_1, π_2 y π_3 los obtendremos hallando las soluciones del sistema formado por las dos ecuaciones (29) y la (30). Sean

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}.$$

Casos posibles:

1.° $\operatorname{rg} A = 3$. El sistema es compatible y determinado. Existe un solo punto común a los tres planos, luego éstos determinan una radiación de planos.

2.° $\operatorname{rg} A = 2$, $\operatorname{rg} B = 3$. El sistema es incompatible. No existe punto común a los tres planos. Pueden ocurrir los siguientes subcasos:

a) Las tres submatrices que se puede formar con dos filas de A son de rango 2. Los planos se cortan en rectas, dos a dos. Cada plano es paralelo a la intersección de los otros dos, pues en caso contrario los tres planos tendrían un punto común.

b) Existe una submatriz de rango 1 y las otras dos son de rango 2. Dos planos son paralelos y el tercero les corta.

No puede haber más subcasos, ya que no puede ocurrir que dos submatrices de dos filas de A sean de rango 1 sin que lo sea la tercera, lo que contradice a la hipótesis de que $\operatorname{rg} A = 2$.

3.° $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2$. Sistema compatible e indeterminado. El sistema es equivalente al formado por dos ecuaciones principales, luego los tres planos pasan por una misma recta. Por ser $\operatorname{rg} B = 2$ una fila de B, por ejemplo, la tercera, es combinación lineal de las otras dos, es decir, existen números λ y μ, tales que

$$a'' = \lambda a + \mu a', \quad b'' = \lambda b + \mu b', \quad c'' = \lambda c + \mu c', \quad d'' = \lambda d + \mu d',$$

luego

$$\pi_3 \equiv \lambda(ax_1 + bx_2 + cx_3 + d) + \mu(a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d') = 0,$$

lo que se expresa simbólicamente mediante

$$\pi_3 = \lambda\pi_1 + \mu\pi_2.$$

4.° $\operatorname{rg} A=1$, $\operatorname{rg} B=2$. El sistema es incompatible. No existe punto que pertenezca simultáneamente a los tres planos. Pueden ocurrir los siguientes subcasos:

a) Que las tres submatrices que se pueden formar con dos filas de B sean de rango 2. Entonces los tres planos son paralelos.

b) Que una de dichas submatrices sea de rango 1 y de rango 2 las otras dos, entonces dos planos coinciden y el otro es paralelo.

5.° $\operatorname{rg} A=\operatorname{rg} B=1$. El sistema es compatible e indeterminado. De hecho es equivalente al formado por una sola ecuación, luego los tres planos coinciden.

RADIACIÓN DE PLANOS DE VÉRTICE DADO POR LA INTERSECCIÓN DE TRES PLANOS.

Supongamos que los planos π, σ y ρ están en la posición correspondiente al caso primero, es decir, tienen un solo punto común. ¿Cuál es la condición que debe cumplir un cuarto plano

$$\omega \equiv a^*x_1+b^*x_2+c^*x_3+d^*=0$$

para pertenecer a la radiación de planos determinada por los tres primeros? Simplemente pasar por el punto común a los tres, pero para ello es necesario que el sistema formado por las ecuaciones de los cuatro planos sea compatible y determinado, lo que exige que

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a^* & b^* & c^* & d^* \end{pmatrix}=3.$$

Ahora bien, por hipótesis:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \neq 0,$$

luego la cuarta fila de la matriz anterior tiene que ser combinación lineal de las tres primeras, es decir, existen tres números reales λ, μ y ν tales que

$$a^*=\lambda a+\mu a'+\nu a'', \quad b^*=\lambda b+\mu b'+\nu b'', \quad c^*=\lambda c+\mu c'+\nu c'',$$
$$d^*=\lambda d+\mu d'+\nu d'',$$

por tanto,

$$(31) \qquad \omega \equiv \lambda(ax_1+bx_2+cx_3+d)+\mu(a'x_1+b'x_2+c'x_3+d')+$$
$$+\nu(a''x_1+b''x_2+c''x_3+d'')=0$$

o, simbólicamente,

$$\omega = \lambda\pi + \mu\sigma + \nu\rho.$$

Si en (31) consideramos λ, μ y ν como parámetros variables, dicha expresión representa la radiación de planos de vértice el punto común a los planos π, σ y ρ. En efecto, las coordenadas de dicho punto anulan al primer paréntesis de (31) por pertenecer el punto a π, anulan al segundo paréntesis por pertenecer a σ y anulan al tercero por pertenecer a ρ, luego anulan a toda la expresión (31) independientemente de los valores λ, μ y ν.

A los números λ, μ y ν se les llama coordenadas homogéneas del plano ω dentro de la radiación, respecto a la base formada por los planos π, σ y ρ. Como los tres parámetros no pueden ser simultáneamente nulos, siempre se puede dividir por uno de ellos que no sea cero, con lo que nos quedan dos parámetros fundamentales.

Haz de planos de arista dada por intersección de dos planos.

Supongamos que los planos π y σ se cortan en una recta r, hemos visto (caso tercero de la discusión anterior) que si un tercer plano ρ pertenece al haz de planos determinado por π y σ se verifica

$$(32) \qquad \rho \equiv \lambda(ax_1 + bx_2 + cx_3 + d) + \mu(a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d') = 0.$$

Si consideramos a λ y μ como parámetros variables, (32) representa el haz de planos de arista la intersección de π y σ, ya que todo punto de r pertenece a π y a σ, por lo que sus coordenadas anulan los dos paréntesis de (32) y, por tanto, anulan el primer término de dicha igualdad, cualesquiera que sean los valores de λ y μ.

A λ y μ se les llama coordenadas homogéneas del plano dentro del haz y respecto a la base formada por π y σ.

Ejemplo 4. Para hallar la ecuación del plano determinado por los puntos P (2, 1, 1), Q (1, 0, 1) y $R = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, siendo

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv x_1 + x_2 = 0 \\ \pi_2 &\equiv 2x_1 + 3x_3 + 1 = 0 \\ \pi_3 &\equiv x_1 - x_2 + x_3 + 2 = 0 \end{aligned}$$

formamos la radiación de planos de vértice R, su ecuación es

$$\lambda(x_1 + x_2) + \mu(2x_1 + 3x_3 + 1) + \nu(x_1 - x_2 + x_3 + 2) = 0.$$

El plano pedido figura entre los de dicha radiación. Para hallar sus

coordenadas dentro de la radiación imponemos la condición de que pase por P y Q, obteniendo el sistema

$$\begin{aligned} 3\lambda + 8\mu + 4\nu &= 0 \\ \lambda + 6\mu + 4\nu &= 0 \end{aligned}$$

una de cuyas soluciones es $(4, -4, 5)$, luego el plano pedido es el

$$x_1 - x_2 - 7x_3 + 6 = 0.$$

EJEMPLO 5. El plano determinado por el punto $P\,(1, 2, -1)$ y por la recta $r = \pi_1 \cap \pi_2$, siendo

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv x_1 + 2x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ \pi_2 &\equiv \quad x_2 - x_3 \quad = 0 \end{aligned}$$

es uno de los del haz de ecuación

$$\lambda(x_1 + 2x_2 + x_3 - 1) + \mu(x_2 - x_3) = 0,$$

imponiendo la condición de contener el punto P, obtenemos la ecuación

$$3\lambda + 3\mu = 0$$

una de cuyas soluciones es $(1, -1)$, luego

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - 1 = 0$$

es el plano pedido.

EJERCICIOS

1. Hállese el plano común a la radiación de planos de vértice $P = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ y al haz de arista la recta determinada por los puntos $Q\,(2, -1, 0)$ y $R\,(1, -1, 1)$, siendo

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv 2x_1 + x_2 \quad + 1 = 0 \\ \pi_2 &\equiv \quad 2x_2 - x_3 - 1 = 0 \\ \pi_3 &\equiv 2x_1 \quad + x_3 \quad = 0. \end{aligned}$$

2. Hállese la posición relativa de los planos

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv 3x_1 - 2x_2 \quad - 1 = 0 \\ \pi_2 &\equiv 2x_1 \quad - x_3 - 4 = 0 \\ \pi_3 &\equiv \quad 4x_2 - 3x_3 + 2 = 0. \end{aligned}$$

3. Hállese la posición relativa de los planos

$$\begin{aligned}
\pi_1 &\equiv \quad x_2 - 3x_3 + 2 = 0 \\
\pi_2 &\equiv 3x_1 - 2x_2 \quad + 6 = 0 \\
\pi_3 &\equiv x_1 \quad - 2x_3 - 1 = 0 \\
\pi_4 &\equiv x_1 \quad - 2x_3 - 4 = 0.
\end{aligned}$$

4. ¿Cuál es la condición para que cuatro planos formen un tetraedro?

14.6. Ecuaciones no paramétricas de la recta.

Si en las ecuaciones paramétricas (17) de una recta r eliminamos el parámetro λ, obtenemos

$$\frac{x_1 - p_1}{v_1} = \frac{x_2 - p_2}{v_2} = \frac{x_3 - p_3}{v_3} \tag{33}$$

que son las llamadas ecuaciones de la recta en *forma continua* y donde (p_1, p_2, p_3) son las coordenadas de un punto fijo de la recta y (v_1, v_2, v_3) las coordenadas de un vector de dirección de la misma.

Si en (33) quitamos denominadores, obtenemos

$$\begin{aligned}
v_2x_1 - v_1x_2 \quad &+ v_1p_2 - v_2p_1 = 0 \\
v_3x_2 - v_2x_3 &+ v_2p_3 - v_3p_2 = 0 \\
v_3x_1 \quad - v_1x_3 &+ v_1p_3 - v_3p_1 = 0
\end{aligned}$$

que son las ecuaciones de tres planos que contienen a la recta r. Para determinar la recta hemos visto, en el caso primero de la posición relativa de dos planos estudiado en el párrafo anterior, que basta con dar dos planos distintos. En efecto, una cualquiera de las tres ecuaciones anteriores es combinación lineal de las otras dos, luego son suficientes dos, por ejemplo, las dos primeras para determinar la recta.

EJEMPLO 1. La recta determinada por los puntos $P\,(2, -3, 4)$, $Q\,(5, -1, 0)$ viene dada por las ecuaciones

$$\frac{x_1 - 2}{3} = \frac{x_2 + 3}{2} = \frac{x_3 - 4}{-4}.$$

EJEMPLO 2. Las ecuaciones en forma continua de la recta

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - x_3 + 3 &= 0 \\
x_1 - x_2 + x_3 \quad &= 0
\end{aligned}$$

las obtenemos hallando primero dos puntos de r. Por ejemplo, para $x_3=0$ nos queda

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+3&=0\\ x_1-x_2\quad&=0\end{aligned}$$

de donde $x_1=-1$, $x_2=-1$. De manera análoga, haciendo $x_2=0$ hallaríamos $x_1=-1$, $x_3=1$, luego los puntos $(-1, -1, 0)$ y $(-1, 0, 1)$ pertenecen a r, de donde

$$\frac{x_1+1}{-1+1}=\frac{x_2+1}{1}=\frac{x_3}{1}$$

es la expresión buscada, por tanto, la variedad de dirección de r es la engendrada por el vector $(0, 1, 1)$.

POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS.

El estudio de la posición relativa de una recta y un plano, cuando aquélla se da como intersección de dos planos, se reduce al estudio de la posición relativa de tres planos, es decir, al estudio de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

El estudio geométrico de la posición relativa de dos rectas r y s dadas cada una de ellas como intersección de dos planos, equivalente al estudio algebraico de un sistema de cuatro ecuaciones lineales con tres incógnitas, queda a cargo del lector.

Sea el plano

$$\pi \equiv ax_1+bx_2+cx_3+d=0,$$

la condición necesaria y suficiente para que un vector libre $\mathbf{v}$ *de coordenadas* (v_1, v_2, v_3) *pertenezca a la variedad de dirección de* π *es que* $av_1+bv_2+cv_3=0$.

Si $\mathbf{v}$ es un vector perteneciente a la variedad de dirección de π y $P\in\pi$ $\exists$ otro punto $Q\in\pi \mid \{\overrightarrow{PQ}\}=\mathbf{v}$, luego

$$v_1=q_1-p_1,\quad v_2=q_2-p_2,\quad v_3=q_3-p_3.$$

Ahora bien, por pertenecer P y Q a π se verifica

$$\begin{aligned} ap_1+bp_2+cp_3+d&=0\\ aq_1+bq_2+cq_3+d&=0\end{aligned}$$

de donde

$$av_1+bv_2+cv_3=a(q_1-p_1)+b(q_2-p_2)+c(q_3-p_3)=0,$$

luego la condición es necesaria.

Si $\mathbf{v}$ es tal que

$$\begin{aligned} av_1+bv_2+cv_3=0 \quad \text{y} \quad P\in\pi\ \exists\ Q \mid \{\overrightarrow{PQ}\}=\mathbf{v} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow a(q_1-p_1)+b(q_2-p_2)+c(q_3-p_3)=0 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow aq_1+bq_2+cq_3=ap_1+bp_2+cp_3 \Longrightarrow \\ \Longrightarrow aq_1+bq_2+cq_3+d=ap_1+bp_2+cp_3+d=0, \end{aligned}$$

luego $Q\in\pi$ y $\mathbf{v}=\{\overrightarrow{PQ}\}$ pertenece a la variedad de dirección de π, con lo que la condición es suficiente.

Estudiemos la posición relativa de una recta y un plano, cuando aquélla se da en su forma continua:

$$\frac{x_1-p_1}{v_1}=\frac{x_2-p_2}{v_2}=\frac{x_3-p_3}{v_3}$$

y éste mediante su ecuación general

$$\pi\equiv ax_1+bx_2+cx_3+d=0.$$

Pueden ocurrir los siguientes casos:

1.° $av_1+bv_2+cv_3\neq 0$. El vector $\mathbf{v}$ de dirección de la recta no pertenece a la variedad de dirección del plano, luego la recta y el plano se cortan.

2.° $av_1+bv_2+cv_3=0$. Pueden ocurrir dos subcasos:

a) $ap_1+bp_2+cp_3+d\neq 0$. El vector de dirección de r pertenece a la variedad de dirección de π, pero el punto P de la recta no pertenece al plano, luego la recta es paralela al plano.

b) $ap_1+bp_2+cp_3+d=0$. La recta está contenida en el plano.

EJEMPLO 3. Si el plano π es paralelo a las rectas

$$r\equiv\frac{x_1}{2}=\frac{x_2+1}{3}=\frac{x_3-1}{-2}$$

$$s\equiv\frac{x_1-2}{1}=\frac{x_2-4}{5}=\frac{x_3+6}{3}$$

y contiene al punto $P\,(2,\,3,\,1)$, se tiene que verificar

$$\begin{gathered} a(x_1-2)+b(x_2-3)+c(x_3-1)=0 \\ 2a+3b-2c=0 \\ a+5b+3c=0 \end{gathered}$$

pero esto equivale a decir que el sistema

$$\begin{aligned}(x_1-2)x+(x_2-3)y+(x_3-1)z&=0\\ 2x+\quad 3y-\quad 2z&=0\\ x+\quad 5y+\quad 3z&=0\end{aligned}$$

es compatible para valores (x_1, x_2, x_3) que sean coordenadas de puntos del plano e incompatible en caso contrario, luego

$$\begin{vmatrix} x_1-2 & x_2-3 & x_3-1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}=0$$

es la ecuación del plano. Desarrollando el determinante obtenemos la ecuación del plano pedido

$$19x_1-8x_2+7x_3-21=0.$$

Sean las rectas

$$r\equiv\frac{x_1-p_1}{v_1}=\frac{x_2-p_2}{v_2}=\frac{x_3-p_3}{v_3}$$

$$s\equiv\frac{x_1-q_1}{w_1}=\frac{x_2-q_2}{w_2}=\frac{x_3-q_3}{w_3}$$

Si los vectores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{q}-\mathbf{p}$ no son coplanarios, no existe ningún plano que contenga a ambas rectas, luego éstas se cruzan. La condición de no ser coplanarios dichos vectores se expresa algebraicamente, como sabemos, mediante la condición

$$\begin{vmatrix} q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}\neq 0 \tag{34}$$

Si por el contrario el determinante anterior es igual a cero, los tres vectores son coplanarios y existe un plano que contiene a las dos rectas. Pueden ocurrir los siguientes subcasos:

a) Que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ sean linealmente independientes, entonces r y s tienen variedades de dirección distintas, luego se cortan en un punto.

b) Que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ sean linealmente dependientes, es decir, que

$$\frac{v_1}{w_1}=\frac{v_2}{w_2}=\frac{v_3}{w_3}$$

pero que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{q}-\mathbf{p}$ sean linealmente independientes, entonces r y s son paralelas, y

c) Que

$$\frac{v_1}{w_1}=\frac{v_2}{w_2}=\frac{v_3}{w_3} \quad \text{y} \quad \frac{q_1-p_1}{w_1}=\frac{q_2-p_2}{w_2}=\frac{q_3-p_3}{w_3},$$

los tres vectores pertenecen a una misma variedad de dimensión 1. Las rectas coinciden.

EJEMPLO 4. Las rectas

$$r\equiv\frac{x_1-2}{3}=\frac{x_2+1}{2}=\frac{x_3-5}{-2}$$

$$s\equiv\frac{x_1+1}{-6}=\frac{x_2-2}{-4}=\frac{x_3}{4}$$

son paralelas, pues

$$\frac{3}{-6}=\frac{2}{-4}=\frac{-2}{4} \quad \text{y} \quad \frac{1-3}{3}\neq\frac{-2+1}{2}.$$

RADIACIÓN DE RECTAS.

Si en las ecuaciones

$$\frac{x_1-p_1}{v_1}=\frac{x_2-p_2}{v_2}=\frac{x_3-p_3}{v_3} \tag{35}$$

damos a p_1, p_2 y p_3 valores fijos y consideramos v_1, v_2, v_3 como parámetros variables, obtenemos la ecuación de todas las rectas del espacio que pasan por el punto P. A este conjunto se le llama *radiación de rectas* de vértice P. Es una doble infinidad, pues, como puede verse, en la ecuación (35) no hay más que dos parámetros fundamentales.

Si en (35) consideramos p_1, p_2 y p_3 como parámetros variables y damos a v_1, v_2 y v_3 valores fijos obtenemos la ecuación de todas las rectas que tienen la misma dirección que el vector $\mathbf{v}$. A este conjunto se le llama *radiación impropia* de rectas.

RADIACIÓN IMPROPIA Y HAZ IMPROPIO DE PLANOS.

Al conjunto de todos los planos paralelos a una recta dada se le llama *radiación impropia* de planos. Si la recta viene dada en la forma

$$\frac{x_1}{v_1}=\frac{x_2}{v_2}=\frac{x_3}{v_3}$$

todo plano $ax_1+bx_2+cx_3+d=0$ de la radiación impropia debe cumplir la condición $av_1+bv_2+cv_3=0$. Eliminando a entre ambas ecuaciones (en el supuesto de que $v_1 \neq 0$) obtenemos la ecuación de la radiación impropia de planos

$$b(v_1x_2-v_2x_1)+c(v_1x_3-v_3x_1)+v_1d=0 \tag{36}$$

donde los parámetros homogéneos son b, c y d.

Se llama *haz impropio* de planos al conjunto de todos los planos paralelos a uno dado. Si éste viene dado por la ecuación

$$ax_1+bx_2+cx_3=0$$

la ecuación del haz impropio será

$$ax_1+bx_2+cx_3+\lambda=0$$

donde λ es el parámetro (no homogéneo) del haz.

EJERCICIOS

1. Hállese la ecuación del plano paralelo a la recta determinada por los puntos P (3, −1, 4) y Q (2, 0, 1) y que pasa por los puntos R (1, 1, 1) y S (−2, 2, 3).

2. La recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x_1-3x_2-5x_3+2=0 \\ x_1 \quad\quad +4x_3-1=0 \end{cases}$$

¿pertenece al plano $7x_1-6x_2+2x_3+1=0$?

3. Compruébese que las rectas

$$r \equiv \frac{x_1-1}{2}=\frac{x_2+2}{2}=\frac{x_3}{-4}$$

$$s \equiv \frac{x_1-2}{1}=\frac{x_2-1}{0}=\frac{x_3+2}{-2}$$

son coplanarias y determínese el plano que las contiene.

4. Hállese la posición relativa de la recta

$$r \equiv \frac{x_1-1}{2}=\frac{x_2+3}{3}=\frac{x_3-5}{-4}$$

y el plano $\pi \equiv 2x_1+4x_2+4x_3-12=0$.

5. Determínense α y β para que la recta

$$r \equiv \frac{x_1-2}{3}=\frac{x_2+1}{5}=\frac{x_3-4}{-2}$$

pertenezca al plano $3x_1+\alpha x_2-3x_3+\beta=0$.

6. Hállese la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r \equiv \frac{x_1+2}{2}=\frac{x_2-1}{-2}=x_3$$

y es paralelo a la

$$s \equiv \begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \end{cases}$$

7. Hállese la posición relativa de las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x_1-x_2+2x_3-1=0 \\ 3x_1-x_3+4=0 \end{cases}$$

y

$$s \equiv \frac{x_1-1}{2}=\frac{x_2}{5}=\frac{x_3+4}{-1}.$$

8. Hállese el plano de la radiación de vértice $P \equiv \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ que contiene a la recta r, siendo

$$\begin{aligned} \pi_1 &\equiv x_1+x_2+x_3-1=0 \\ \pi_2 &\equiv 2x_1-x_2=0 \\ \pi_3 &\equiv 3x_2+4=0 \end{aligned}$$

y

$$r \equiv \begin{cases} x_1-2x_2+3=0 \\ 2x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

9. Hállese la proyección de la recta

$$r \equiv \frac{x_1}{2}=\frac{x_2-1}{-1}=\frac{x_3}{3}$$

sobre el plano

$$2x_1+x_2-x_3+4=0$$

paralelamente al vector $3\mathbf{u}_1-2\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3$.

10. Hállense las ecuaciones de la recta que se apoya en las

$$r \equiv \frac{x_1-2}{3}=\frac{x_2}{1}=\frac{x_3+1}{5}$$

$$s \equiv \begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+6=0 \end{cases}$$

y es paralela a la

$$t \equiv \frac{x_1}{2}=\frac{x_2}{-3}=\frac{x_3}{4}.$$

JAR'23

15

espacio afín asociado a un espacio vectorial

En el presente capítulo nos proponemos generalizar los conceptos estudiados en los dos capítulos anteriores. Esta generalización se obtendrá al considerar espacios vectoriales V cualesquiera de dimensión finita sobre un cuerpo K, en lugar de considerar el espacio vectorial de los vectores libres sobre el cuerpo de los números reales, como se hacía en dichos capítulos.

En el último párrafo (subconjuntos convexos) impondremos una restricción al espacio vectorial V. El cuerpo de escalares será el cuerpo de los números reales R.

15.1 Espacio afín asociado a un espacio vectorial.

En el capítulo 7 llegamos al concepto de espacio vectorial abstracto a partir del concepto de vector libre del espacio ordinario. El proceso era el siguiente: definíamos un vector del espacio como un segmento de recta más un sentido o, lo que es lo mismo, asociábamos a cada pareja ordenada de puntos A, B del espacio ordinario un vector $\overrightarrow{AB}$; clasificábamos el conjunto de todos los vectores del espacio mediante una relación de equivalencia: la equipolencia, y a cada una de las clases de equivalencia le llamábamos vector libre; por último, definíamos la suma de vectores libres y el producto de un número real por un vector libre y estudiábamos las propiedades de estas leyes de composición. Todo conjunto V sobre el cual existiera definida una ley de composición interna y otra externa cuyo dominio de operadores fuera un cuerpo K, teniendo ambas leyes las mismas propiedades que en el caso de los vectores libres era, por definición, un espacio vectorial sobre el cuerpo K.

Vamos a ver si es posible el proceso contrario, es decir, partiendo de un espacio vectorial V cualquiera sobre un cuerpo K, trataremos de asociarle un conjunto de elementos, a los que llamaremos

puntos, que tenga con el espacio vectorial dado relación análoga a la que tiene el espacio ordinario respecto al espacio de vectores libres.

Antes de construir tal conjunto vamos a enumerar las propiedades que deberá tener, con objeto de garantizar que su relación con el espacio vectorial de partida es la deseada. A estas propiedades les llamaremos axiomas de un espacio afín.

Un conjunto A no vacío de elementos, a los que simbolizaremos mediante letras mayúsculas, se llama *espacio afín* asociado al espacio vectorial V, si existe una aplicación $\varphi\colon A^2 \longrightarrow V$, tal que

A_1. Si $P \in A$ y $x \in V$ existe al menos otro punto

$$Q \in A \mid \varphi(P, Q) = x.$$

A_2. Si $\varphi(P, Q) = 0 \Longrightarrow P = Q$.

A_3. Si $P, Q, R \in A \Longrightarrow \varphi(P, Q) + \varphi(Q, R) = \varphi(P, R)$.

Las consecuencias inmediatas de estos axiomas son:

1. Si hacemos

$$P = Q = R \text{ en } A_3 \Longrightarrow \varphi(P, P) + \varphi(P, P) = \varphi(P, P) \Longrightarrow \varphi(P, P) = 0.$$

Esto prueba que el recíproco de A_2 es también cierto.

2. Si hacemos

$$R = P \text{ en } A_3 \Longrightarrow \varphi(P, Q) + \varphi(Q, P) = \varphi(P, P) = 0,$$

de acuerdo con la propiedad 1, luego

$$\varphi(P, Q) = -\varphi(Q, P).$$

3. A_3 puede escribirse en la forma

$$\varphi(Q, R) = \varphi(P, R) - \varphi(P, Q)$$

es decir, el vector asociado a dos puntos es igual a la diferencia de los vectores asociados a un tercer punto y al segundo y primero, respectivamente.

4. Si

$$\varphi(P, R) = \varphi(P, R') \Longrightarrow \varphi(R, R') = \varphi(P, R') - \varphi(P, R) = 0 \Longrightarrow R = R'$$

en virtud de A_2.

Luego A_1, puede mejorarse en el sentido de que: existe un único punto

$$R \mid \varphi(P, R) = x.$$

Vamos a ver que dado un espacio vectorial V cualquiera sobre un cuerpo K, existe siempre un espacio afín asociado a él, a saber: el mismo conjunto V. En efecto, si definimos la aplicación φ: $V^2 \longrightarrow V$ mediante $\varphi(x, y) = y - x$, tenemos:

I) Si

$$x, z \in V \Longrightarrow \exists\, y \in V \mid \varphi(x, y) = z.$$

Basta tomar $y = z + x$. Se cumple, pues, A_1;

II) Si

$$\varphi(x, y) = 0 \Longrightarrow y - x = 0 \Longrightarrow x = y.$$

por tanto, se cumple A_2, y

III)

$$\varphi(x, y) + \varphi(y, z) = (y - x) + (z - y) = z - x = \varphi(x, z),$$

con lo que queda probado que se verifica A_3.

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que en un espacio afín asociado a un espacio vectorial cualquiera se cumple la propiedad del paralelogramo (Ej. 3 de 7.1).

2. Demuéstrese que dos espacios afines asociados a un mismo espacio vectorial son isomorfos. ¿Cuántos isomorfismos existen entre ambos?

15.2. Variedades lineales afines.

Un subconjunto L_A de un espacio afín A se llama *variedad lineal afín* si existe un subespacio L, del espacio vectorial V, tal que L_A sea un espacio afín asociado a L. Se denominará dimensión de L_A a la de L y esta última se dirá que es la *variedad de dirección* de L_A.

A las variedades lineales afines de dimensión 1 se les llama *rectas* y a las de dimensión inferior en una unidad a la del espacio vectorial se les llama *hiperplànos.*

La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto L_A *de un espacio afín* A *sea una variedad lineal afín con variedad de dirección* L *es que exista un punto* $P \in L_A$ *tal que cuando* X *recorre* L_A, $\varphi(P, X)$ *recorre* L.

La condición necesaria es consecuencia de la definición de variedad lineal afín y del axioma A_1.

Supongamos ahora que L_A es un subconjunto de A para el que se verifica la condición dada. Si Q y R son dos puntos de L_A, entonces $\varphi(Q,R)=\varphi(P,R)-\varphi(P,Q)$ es un vector de L. Sólo queda comprobar el axioma A_1, puesto que los otros dos se cumplen en L_A por cumplirse en A. Ahora bien, si $Q\in L_A$ y $x\in L\Longrightarrow\varphi(P,Q)+x\in L$ y, en virtud de la hipótesis, existe un punto $R\in L_A$ tal que

$$\varphi(P,R)=\varphi(P,Q)+x,$$

pero de esta igualdad y de

$$\varphi(P,R)=\varphi(P,Q)+\varphi(Q,R)$$

se deduce

$$\varphi(Q,R)=x.$$

Luego, la condición es suficiente.

Para todo punto P *de* A *y para todo subespacio* L *de* V *existe una sola variedad lineal afín* L_A *cuya variedad de dirección sea* L *y que contenga el punto* P.

Sea O un punto fijo de A, entonces

$$L_A=\{X\in A\mid\varphi(O,X)\in\varphi(O,P)+L\}.$$

En efecto, si

$$\varphi(O,X)\in\varphi(O,P)+L\Longrightarrow\varphi(O,X)-\varphi(O,P)=$$
$$=\varphi(P,X)\in L\Longrightarrow X\in L_A$$

y, recíprocamente, si

$$X\in L_A\Longrightarrow\varphi(P,X)\in L\Longrightarrow\varphi(P,X)=\varphi(O,X)-$$
$$-\varphi(O,P)\in L\Longrightarrow\varphi(O,X)\in\varphi(O,P)+L.$$

Dos variedades lineales afines L_A y L_A', de variedades de dirección L y L', se dice que son *paralelas* si $L\subset L'$.

Si dos variedades lineales afines L_A *y* L_A' *son paralelas o* $L_A\subset L_A'$ *o* $L_A\cap L_A'=\phi$.

En efecto, si

$$\exists\ P\in L_A\cap L_A'\quad\text{y}\quad X\in L_A\Longrightarrow\varphi(O,X)\in\varphi(O,P)+L,$$

pero como

$$L\subset L'\Longrightarrow\varphi(O,X)\in\varphi(O,P)+L',$$

es decir,

$$X \in L_A'.$$

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que si L_A y L'_A son variedades lineales afines de variedades de dirección respectivas L y L' y si $L_A \cap L'_A$ contiene al menos un punto P, entonces $L_A \cap L_A'$ es una variedad lineal afín y $L \cap L'$ es su variedad de dirección.

2. Demuéstrese que existe una y solo una recta de A que contenga a dos puntos distintos P y Q.

3. Demuéstrese que existe un solo hiperplano que contenga n puntos no pertenecientes a una variedad lineal afín de dimensión $n-2$. Se supone que el espacio afín es de dimensión n.

15.3. Ecuaciones de las variedades lineales afines.

Sea O un punto fijo del espacio afín A y $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de V. Las aplicaciones

$$\psi\colon A \longrightarrow V \quad \text{y} \quad \sigma\colon V \longrightarrow K^n$$

dadas por

$$\psi(X) = \varphi(O, X) \quad \forall \quad X \in A$$

y

$$\sigma(x) = \sigma(x_1u_1 + \ldots + x_nu_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \forall \quad x \in V,$$

respectivamente, son, como se ve fácilmente, biyectivas, luego la aplicación

$$\sigma \circ \psi\colon A \longrightarrow K^n$$

también lo es.

Obsérvese que ψ depende del punto O y σ de la base $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$. Al conjunto $\{O;\ u_1, \ldots, u_n\}$ se le llama *sistema de referencia* en A.

A los escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obtenidos mediante la aplicación $\sigma \circ \psi$ al actuar ésta sobre el punto X se les llama coordenadas de X respecto al sistema de referencia $\{O;\ u_1, \ldots, u_n\}$.

Sea L_A una variedad lineal afín de dimensión h, y L su variedad de dirección. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_h\}$ una base de L y las coordenadas del vector v_i respecto a la base $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$ $(v_{i1}, \ldots, v_{in})$.

Si $X \in L_A$, tenemos

$$\varphi(O, X) \in \varphi(O, P) + L$$

de donde

$$\varphi(P, X) = \varphi(O, X) - \varphi(O, P) \in L$$

luego

$$\varphi(P, X) = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_h v_h$$

igualdad vectorial equivalente a las n igualdades escalares

$$\begin{aligned} x_1 - p_1 &= \lambda_1 v_{11} + \ldots + \lambda_h v_{h1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n - p_n &= \lambda_1 v_{1n} + \ldots + \lambda_h v_{hn} \end{aligned} \tag{37}$$

siendo $(x_1, \ldots, x_n)$ las coordenadas de $\varphi(O, X)$ y $(p_1, \ldots, p_n)$ las de $\varphi(O, P)$ respecto a la base $\{u_i\}_{1 \le i \le n}$. De (37) obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + \lambda_1 v_{11} + \ldots + \lambda_h v_{h1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= p_n + \lambda_1 v_{1n} + \ldots + \lambda_h v_{hn} \end{aligned}$$

que son las *ecuaciones paramétricas* de la variedad lineal afín L_A.

Puesto que el vector $\varphi(P, X)$ depende linealmente de los v_1, v_2, ..., v_h, tenemos que

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 & \ldots & x_n - p_n \\ v_{11} & v_{12} & & v_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ v_{h1} & v_{h2} & & v_{hn} \end{pmatrix} = h$$

luego los menores de orden $h+1$ son nulos

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & \ldots & x_{h+1} - p_{h+1} \\ v_{11} & \ldots & v_{1,h+1} \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ v_{h1} & \ldots & v_{h,h+1} \end{vmatrix} = 0, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} x_{n-h} - p_{n-h} & \ldots & x_n - p_n \\ v_{1,n-h} & \ldots & v_{1,n} \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ v_{h,n-h} & \ldots & v_{h,n} \end{vmatrix} = 0$$

ahora bien, puesto que la dimensión de L es h, sólo $n-h$ de estas $\binom{n}{h+1}$ ecuaciones son linealmente independientes.

Recíprocamente, sean las $n-h$ ecuaciones linealmente independientes

$$\begin{aligned} a_{11} \quad x_1 + \ldots + a_{1n} \quad x_n &= b_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-h,1} x_1 + \ldots + a_{n-h,n} x_n &= b_{n-h} \end{aligned} \tag{38}$$

Supongamos que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-h} \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ a_{n-h,1} & \dots & a_{n-h,n-h} \end{vmatrix} \neq 0$$

y sean

$$\begin{aligned} X_0 &\equiv (\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0,n-h}, 0, \dots, 0) \\ X_1 &\equiv (\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1,n-h}, 1, \dots, 0) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_h &\equiv (\lambda_{h1}, \lambda_{h2}, \dots, \lambda_{h,n-h}, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

las soluciones del sistema (38) que resultan al dar a las incógnitas no principales los valores $(0, 0, \overset{(h}{\dots}, 0)$, $(1, 0, \overset{(h}{\dots}, 0)$, ..., $(0, 0, \overset{(h}{\dots}, 1)$. Hemos llamado X_0, X_1, ..., X_h, respectivamente a los puntos de A que tienen por coordenadas estas soluciones.

Los h vectores

$$\begin{aligned} &\varphi(X_0, X_1) \equiv (\lambda_{11} - \lambda_{01}, \lambda_{12} - \lambda_{02}, \dots, \lambda_{1,n-h} - \lambda_{0,n-h}, 1, 0, \dots, 0) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\varphi(X_0, X_h) \equiv (\lambda_{h1} - \lambda_{01}, \lambda_{h2} - \lambda_{02}, \dots, \lambda_{h,n-h} - \lambda_{0,n-h}, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

son, como se ve fácilmente, linealmente independientes. Sea L la variedad lineal engendrada por estos vectores y L_A la variedad lineal afín que tiene a L como variedad de dirección y contiene al punto X_0. Cualquier punto X cuyas coordenadas $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-h}, \alpha_{n-h+1}, \dots, \alpha_n)$ sean solución de (38) pertenece a L_A, pues

$$\varphi(X_0, X) = \alpha_{n-h+1}\varphi(X_0, X_1) + \dots + \alpha_n\varphi(X_0, X_h).$$

En definitiva las $n-h$ ecuaciones linealmente independientes (38) son las *ecuaciones no paramétricas* de una variedad lineal afín de dimensión h.

Si L_A es una recta, sus ecuaciones no paramétricas serán en número de $n-1$, y si L_A es un hiperplano, se reducirán a una sola.

EJEMPLO 1. Las ecuaciones paramétricas de la variedad lineal afín determinada por los puntos $A_1(1, 0, 2, 3, 0)$, $A_2(2, 7, 5, 4, 3)$ y $A_3(-2, 4, 1, -5, 6)$ serán:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + \lambda_1(2-1) + \lambda_2(-2-1) = 1 + \lambda_1 - 3\lambda_2 \\ x_2 &= \lambda_1(7-0) + \lambda_2(4-0) = 7\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ x_3 &= 2 + \lambda_1(5-2) + \lambda_2(1-2) = 2 + 3\lambda_1 - \lambda_2 \\ x_4 &= 3 + \lambda_1(4-3) + \lambda_2(-5-3) = 3 + \lambda_1 - 8\lambda_2 \\ x_5 &= \lambda_1(3-0) + \lambda_2(6-0) = 3\lambda_1 + 6\lambda_2 \end{aligned}$$

y las no paramétricas

$$\begin{vmatrix} x_1-1 & x_2 & x_3-2 \\ 1 & 7 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x_1-1 & x_2 & x_4-3 \\ 1 & 7 & 1 \\ -3 & 4 & -8 \end{vmatrix}=0 \quad \begin{vmatrix} x_1-1 & x_2 & x_5 \\ 1 & 7 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \end{vmatrix}=0$$

que desarrolladas dan

$$\begin{aligned} -19x_1-8x_2+25x_3 \qquad\quad &-31=0 \\ -12x_1+x_2 \qquad +5x_4 \quad &-3=0 \\ 6x_1-3x_2 \qquad\quad +5x_5 &-6=0 \end{aligned}$$

EJERCICIOS

1. Ecuación no paramétrica del hiperplano determinado por los puntos P (0, 1, 0, 1), Q (−1, 0, 0, 0), R (2, 1, 0, −1) y S (1, 2, 1, 2).

2. Hállese la variedad lineal afín $L_A \cap L'_A$ siendo

$$L_A \equiv \begin{cases} x_1-2x_2+x_3 \quad -x_5=2 \\ x_1 \quad -x_3+4x_4 \quad =1 \end{cases}$$

y L'_A la recta determinada por los puntos P (1, 1, −1, 1, −1) y Q (1, 0, 1, 0, 1).

3. ¿Son paralelas las variedades lineales

$$L_A \equiv \begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=2 \\ x_1 \quad +x_3 \quad =4 \end{cases}$$

y

$$L'_A \equiv \begin{cases} x_1 \quad\quad\quad =2 \\ x_1 \quad +x_3 \quad =4 \\ 2x_1 \quad\quad +x_4=-1 \end{cases} ?$$

4. Hállese la variedad de dirección de la variedad lineal afín

$$L \equiv \begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+x_4=2 \\ 2x_1-x_2+4x_3 \quad =5 \end{cases}$$

15.4. Subconjuntos convexos de un espacio afín asociado a un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

Sea $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b$ la ecuación no paramétrica de un hiperplano π de un espacio afín A asociado a un espacio vectorial V de dimensión n sobre el cuerpo de los números reales. Por tanto, los coeficientes a_i y el término independiente b de la ecuación anterior son números reales. Los tres subconjuntos de A siguientes:

$$\begin{aligned} S_1(\pi) &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A \mid a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n > b\}, \\ S_2(\pi) &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A \mid a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = b\}, \\ S_3(\pi) &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A \mid a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n < b\} \end{aligned}$$

constituyen una partición de A. A $S_1(\pi)$ y $S_3(\pi)$ se les llama *semiespacios abiertos* determinados por π. Se denominan *semiespacios cerrados determinados* por π a los subconjuntos de puntos de A, $C_1(\pi)$ y $C_2(\pi)$ dados por

$$C_1(\pi) = S_1(\pi) \cup S_2(\pi)$$

y

$$C_2(\pi) = S_3(\pi) \cup S_2(\pi)$$

Como en los dos capítulos anteriores, llamaremos vector de posición del punto X respecto al origen O, al vector $\varphi(O, X)$ y lo representaremos por la letra minúscula correspondiente.

Al conjunto de los puntos de la recta $r \equiv x = p + \lambda(q-p)$, definido mediante

$$S[P, Q] = \{x \mid x = p + \lambda(q-p), \quad \lambda \geqq 0\}$$

se le llama *semirrecta cerrada.* Al subconjunto

$$S(P, Q) = \{x \mid x = p + \lambda(q-p), \quad \lambda > 0\}$$

se le llama *semirrecta abierta.*

Obsérvese que puesto que la ecuación vectorial de r puede escribirse

$$x = \lambda_1 p + \lambda_2 q, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

tenemos que

$$S[P, Q] = \{x \mid x = \lambda_1 p + \lambda_2 q, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_2 \geqq 0\}$$

y

$$S[Q, P] = \{x \mid x = \lambda_1 p + \lambda_2 q, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 \geqq 0\}$$

Al subconjunto

$$[P, Q] = S[P, Q] \cap S[Q, P] = \{x \mid x = \lambda_1 p + \lambda_2 q, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \ 0 \leqq \lambda_1 \leqq 1\}$$

se le llama *intervalo cerrado de extremos* P y Q, y al subconjunto

$$(P, Q) = S(P, Q) \cap S(Q, P) = \{x \mid x = \lambda_1 p + \lambda_2 q, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \ 0 < \lambda_1 < 1\}$$

se le denomina *intervalo abierto* de extremos P y Q.

Un subconjunto C de A se dice *convexo* si cualesquiera que sean los puntos X_1 y X_2 de C, el segmento cerrado $[X_1, X_2]$ está conte-

nido en C. Convendremos que el subconjunto formado por un solo punto de A es convexo.

La idea intuitiva de subconjunto convexo es la de un subconjunto de una pieza, sin agujeros y sin entrantes.

Un punto X de un subconjunto convexo C se llama *punto extremo* si no existen otros puntos X_1 y X_2, distintos, de C tales que $X \in (X_1, X_2)$.

EJEMPLO 1. Un semicírculo es un subconjunto convexo de E_2. Posee infinitos puntos extremos.

EJEMPLO 2. Una corona circular no es un subconjunto convexo de E_2.

EJEMPLO 3. Una esfera es un subconjunto convexo de E_3. Todos los puntos de la superficie esférica que la limita son puntos extremos.

Un punto P $(p_1, \ldots, p_n)$ de un subconjunto convexo C se llama *punto frontera* si existe al menos un hiperplano π tal que $P \in \pi$ y el subconjunto convexo C está contenido totalmente en uno de los dos semiespacios cerrados que determina π. Al hiperplano π se le llama soporte del punto frontera P. Un mismo punto frontera puede tener más de un hiperplano soporte.

EJEMPLO 4.

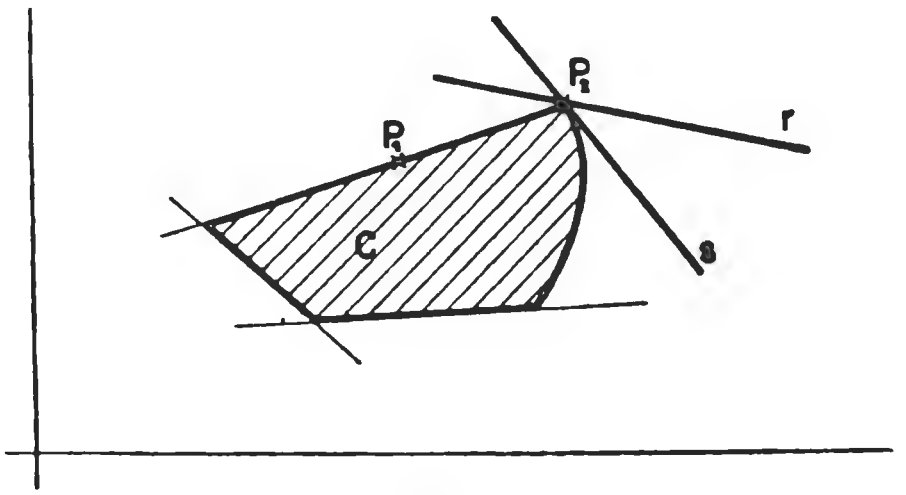


FIG. 2.

Los puntos P_1 y P_2 son puntos frontera del conjunto convexo C La recta determinada por P_1 y P_2 es soporte del punto P_1 y también de P_2 y las rectas r y s lo son también de P_2.

Todo semiespacio abierto o cerrado de un espacio afín es un subconjunto convexo.

Demostración: Sea el semiespacio abierto

$$S(\pi)=\{(x_1,\ \ldots,\ x_n)\in A \mid a_1x_1+\ldots+a_nx_n>b\}$$

Si los puntos $P\ (p_1,\ \ldots,\ p_n)$ y $Q\ (q_1,\ \ldots,\ q_n)$ pertenecen a $S(\pi)$, se verifica

$$a_1p_1+\ldots+a_np_n>b$$
$$a_1q_1+\ldots+a_nq_n>b$$

Si

$$X\in[P,Q]\Longrightarrow(x_1,\ \ldots,\ x_n)=\lambda_1(p_1,\ \ldots,\ p_n)+\lambda_2(q_1,\ \ldots,\ q_n)$$

con

$$\lambda_1+\lambda_2=1 \quad \text{y} \quad 0\leqq\lambda_2\leqq 1,$$

luego

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n=\lambda_1(a_1p_1+\ldots+a_np_n)+$$
$$+\lambda_2(a_1q_1+\ldots+a_nq_n)>\lambda_1b+\lambda_2b=b,$$

de donde

$$X\in S(\pi).$$

La demostración para un semiespacio cerrado sería análoga.

La intersección de dos subconjuntos convexos C_1 *y* C_2 *es un subconjunto convexo.*

Si C_1 y C_2 son disjuntos o su intersección se reduce a un punto no hay nada que demostrar, ya que el conjunto vacío y el conjunto de un solo punto son conjuntos convexos.

Si $P,Q\in C_1\cap C_2$ siendo $P\neq Q\Longrightarrow P,Q\in C_1$ y $P,Q\in C_2\Longrightarrow$ $\Longrightarrow[P,Q]\subset C_1$ y $[P,Q]\subset C_2$ por ser C_1 y C_2 convexos, luego

$$[P,Q]\subset C_1\cap C_2.$$

Por inducción, la intersección de un número finito de subconjuntos convexos es un subconjunto convexo.

Todo hiperplano π *de un espacio afín es un subconjunto convexo.*

En efecto, el hiperplano π es la intersección de los semiespacios cerrados $C_1(\pi)$ y $C_2(\pi)$.

La variedad lineal afín L_A de ecuaciones no paramétricas

$$L_A\equiv\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n+b_1=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{h1}x_1+\ldots+a_{hn}x_n+b_h=0 \end{cases}$$

puede considerarse como la intersección de los hiperplanos

$$\pi_1 \equiv a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\pi_h \equiv a_{h1}x_1 + \ldots + a_{hn}x_n + b_h = 0$$

luego:

Toda variedad lineal afín es un subconjunto convexo,

o lo que es lo mismo:

El conjunto de las soluciones de *un sistema de* m *ecuaciones lineales con* n *incógnitas es un subconjunto convexo de un espacio afín de dimensión* n.

Se llama *subconjunto poliédrico convexo* de A a la intersección de un número finito de semiespacios cerrados.

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{h1}x_1 + \ldots + a_{hn}x_n \leq b_h$$

A los hiperplanos

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1, \ldots, h$$

se les llama *hiperplanos frontera* y a los puntos pertenecientes al subconjunto poliédrico convexo que son intersección de n hiperplanos frontera se les llama *vértices.*

Un subconjunto poliédrico convexo se dice *acotado* cuando no contiene a ninguna semirrecta.

EJERCICIOS

1. Hállense los hiperplanos frontera del subconjunto poliédrico convexo de vértices A (2, 5), B (6, 2), C (8, 5), D (7, 8), E (3, 8).

2. ¿Es convexo el subconjunto $A = B \cap C$, siendo

$$B = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 \geq 0,\ x_2 < 0,\ 6x_1 - 5x_2 - 30 \leq 0\}$$
$$C = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 > 2,\ x_2 \leq 1\}?$$

3. ¿Es convexo el subconjunto $A = B - C$, siendo

$$B = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4\}$$
$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1^2 + (x_2 - 2)^2 + x^3 > 4\}?$$

4. ¿Es convexo el conjunto $\complement A$, siendo

$$A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b\}?$$

JAR'23

16

el plano euclídeo

16.1. Producto escalar.

Sea V_2 el conjunto de los vectores libres del plano, se llama producto escalar a una aplicación $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longrightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ de $V_2 \times V_2$ en R definida por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}| \cos \widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$$

PROPIEDADES.

1. $$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$$

En efecto,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}|\ |\mathbf{y}| \cos \widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = |\mathbf{y}|\ |\mathbf{x}| \cos \widehat{\mathbf{y}, \mathbf{x}} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x},$$

puesto que

$$\cos \widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \cos \widehat{\mathbf{y}, \mathbf{x}}.$$

2. $$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}.$$

Elegidos dos representantes de los vectores libres $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, con origen en un punto fijo O, $\{\overrightarrow{OX}\}$ y $\{\overrightarrow{OY}\}$ tenemos

$$|\mathbf{x}| = |\{\overrightarrow{OX}\}| = \overline{OX}, \quad |\mathbf{y}| = |\{\overrightarrow{OY}\}| = \overline{OY}, \quad \widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \widehat{XOY},$$

luego

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \overline{OX} \cdot \overline{OY} \cos \widehat{XOY} = OX \cdot \mathrm{pr}_{ox}\, \overline{OY}$$

donde $\mathrm{pr}_{ox}\, \overline{OY}$ es la longitud de la proyección ortogonal del segmento OY sobre la recta determinada por los puntos O y X. Si $\{\overline{YZ}\} = \mathbf{z}$ tenemos

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \overline{OX} \cdot \mathrm{pr}_{ox}\, \overline{OZ} = \overline{OX}(\mathrm{pr}_{ox}\, \overline{OY} + \mathrm{pr}_{ox}\, \overline{YZ}) =$$

$$= \overline{OX} \cdot \mathrm{pr}_{ox}\, \overline{OY} + \overline{OX} \cdot \mathrm{pr}_{ox}\, \overline{YZ} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}.$$

3. $$\lambda\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{x}\cdot\lambda\mathbf{y}=\lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) \quad \forall \quad \lambda\in R.$$

Demostraremos que $\lambda\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$. Hay que distinguir tres casos:

a) $\lambda = 0$. La demostración es inmediata.

b) $\lambda > 0$. $\lambda\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=|\lambda\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\cos\widehat{\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}}=|\lambda|\,|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\cos\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}}=$
$$=\lambda(|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\cos\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}})=\lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}).$$

c) $\lambda < 0$. $\lambda\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=|\lambda\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\cos\widehat{\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}}=|\lambda|\,|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\cos\widehat{\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}}=$
$$=-\lambda|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\cos(\pi-\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}})=\lambda(|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\cos\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}})=$$
$$=\lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}).$$

En virtud de las propiedades 2 y 3 el producto escalar es una forma bilineal sobre el espacio vectorial V_2. Como consecuencia de la propiedad 1 dicha forma bilineal es simétrica.

La forma bilineal anterior permite definir la siguiente función de V_2 en R

$$\mathbf{x}\longrightarrow\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}^2$$

a la que se llama *forma cuadrática asociada* a la forma bilineal.

Al valor $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}^2$ se le llama *norma* del vector $\mathbf{x}$ y se representa por $\|\mathbf{x}\|$. Obsérvese que la norma de un vector libre es igual al cuadrado de su módulo,

$$|\mathbf{x}|^2=\|\mathbf{x}\|.$$

Por ser $\mathbf{x}^2\geqq 0$ para todo $\mathbf{x}\in V_2$, siendo válido el signo $=$ si y sólo si $\mathbf{x}=0$, se dice que la citada forma cuadrática es definida positiva.

A todo espacio vectorial V_2 sobre el cuerpo de los números reales sobre el que hay definida una forma bilineal simétrica, cuya forma cuadrática asociada sea definida positiva, se le llama *espacio vectorial euclídeo*. Luego V_2 es un espacio vectorial euclídeo.

Veamos que la norma del vector $\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}$ se puede expresar mediante las normas de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ y el producto escalar $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$. Tenemos

(39) $$\|\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}\|=(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})^2=\lambda^2\mathbf{x}^2+2\lambda\mu\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mu^2\mathbf{y}^2=$$
$$=\lambda^2\|\mathbf{x}\|+2\lambda\mu\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mu^2\|\mathbf{y}\|.$$

Puesto que $|\cos\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}}|\leqq 1$, de la definición de producto escalar se obtiene la siguiente desigualdad

(40) $$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|\leqq|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|$$

llamada de *Cauchy-Schwarz*.

De la relación (39) con $\lambda=\mu=1$ y de la desigualdad

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \leq |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|,$$

se deduce

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|+2|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|^2+|\mathbf{y}|^2+ \\ +2|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| = (|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|)^2$$

y si

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} \neq 0, \qquad \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| > 0,$$

luego

$$\sqrt{\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|} = |\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}|+|\mathbf{y}| \tag{41}$$

donde únicamente puede ser válido el signo igual si $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|$, lo que sólo es posible si $\mathbf{x}=0$ o $\mathbf{y}=0$ o $\cos\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}}=1$, y este último caso equivale a que $\mathbf{y}=\lambda\mathbf{x}$. En resumen, *el módulo de la suma de dos vectores es menor o igual que la suma de sus módulos y sólo es igual si al menos uno de los dos es nulo o si son linealmente dependientes.* A la relación (41) se le llama *desigualdad de Minkowsky.*

Angulo de dos vectores.

Para hallar el ángulo que forman dos vectores podemos utilizar la fórmula siguiente:

$$\cos(\widehat{\mathbf{x},\mathbf{y}}) = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|} \tag{42}$$

Expresión analítica del producto escalar.

Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base en V_2 y $\mathbf{x}=x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{y}=y_1\mathbf{u}_1+y_2\mathbf{u}_2$, tenemos

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = (x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2)(y_1\mathbf{u}_1+y_2\mathbf{u}_2) = (x_1y_1)|\mathbf{u}_1|^2+ \\ +(x_1y_2+x_2y_1)\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2+(x_2y_2)|\mathbf{u}_2|^2$$

que es la expresión analítica del producto escalar respecto a la base dada. Si los vectores de la base son unitarios, es decir, si

$$|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = 1$$

y perpendiculares se les llama *ortonormales* y a la base *base ortonormal* o *métrica.* Si la base es métrica, la expresión analítica del producto escalar se reduce a

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1+x_2y_2 \tag{43}$$

y la sencillez de la misma aconseja la utilización de bases métricas en los problemas en que interviene el producto escalar.

Las expresiones analíticas del módulo de un vector y del coseno del ángulo que forman dos vectores son, en una base métrica,

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\|\mathbf{x}\|} = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tag{44}$$

y

$$\cos \widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}, \tag{45}$$

respectivamente.

EJEMPLO 1. Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base métrica y $\mathbf{x} = 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{y} = -\mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2$ entonces

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$|\mathbf{y}| = \sqrt{1 + 4^2} = \sqrt{17}$$

$$\cos \widehat{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \frac{3(-1) + 2\cdot 4}{\sqrt{13}\sqrt{17}} = \frac{5}{\sqrt{221}}$$

De acuerdo con (45), la condición necesaria para que dos vectores no nulos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sean perpendiculares es que su producto escalar sea nulo, es decir, que

$$x_1y_1 + x_2y_2 = 0. \tag{45'}$$

EJERCICIOS

1. Los vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de una base de V_2 son tales que $|\mathbf{u}_1| = 2$, $|\mathbf{u}_2| = 5$ y $\widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2} = 60°$. Calcúlese

a) el producto escalar de los vectores $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ e $\mathbf{y} = 3\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2$,

b) el módulo de dichos vectores, y

c) el ángulo que forman.

2. Demuéstrese que el conjunto de todos los vectores perpendiculares a un vector dado $\mathbf{x}$ de V_2 es una variedad lineal de V_2. Se le llama *variedad ortogonal* de $\mathbf{x}$. ¿Cuál es su dimensión?

3. Si $\mathbf{x} = 2\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2$, siendo $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ una base métrica de V_2, hállense:

a) una base de su variedad ortogonal,

b) sus ecuaciones paramétricas, y

c) sus ecuaciones no paramétricas.

4. Demuéstrese vectorialmente que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

5. Dedúzcase vectorialmente la fórmula que da el cuadrado de un lado de un triángulo en función de los otros dos y del ángulo que forman.

6. Demuéstrese vectorialmente que las diagonales de un rombo se cortan en ángulo recto.

7. Dados los vectores x e y, descompóngase x en suma de otros dos, uno paralelo a y y otro perpendicular.

16.2. Cambio de base en el espacio vectorial euclídeo.

Vimos en [12.1] que si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ son dos bases de V_2 tales que $\mathbf{v}_i = a_{i1}\mathbf{u}_1 + a_{i2}\mathbf{u}_2$, las fórmulas de cambio de base venían dadas por

$$(x_1, x_2) = (x_1', x_2') \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

donde (x_1, x_2) son las coordenadas de un vector respecto a la primera base y (x_1', x_2') lo son respecto a la segunda.

Veamos la significación geométrica de los escalares a_{ij}. Multiplicando escalarmente las igualdades $\mathbf{v}_i = a_{i1}\mathbf{u}_1 + a_{i2}\mathbf{u}_2$ $i = 1, 2$ por los vectores $\mathbf{u}_i$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1 &= a_{11}|\mathbf{u}_1|^2 + a_{12}(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2) \\
\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 &= a_{11}(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2) + a_{12}|\mathbf{u}_2|^2 \\
\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= a_{21}|\mathbf{u}_1|^2 + a_{22}(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2) \\
\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 &= a_{21}(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2) + a_{22}|\mathbf{u}_2|^2
\end{aligned}$$

De las dos primeras obtenemos

$$a_{11} = \frac{|\mathbf{v}_1|\ (\cos \widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1} - \cos \widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2} \cdot \cos \widehat{\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1})}{|\mathbf{u}_1|\ \operatorname{sen}^2 \widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2}}$$

$$a_{12} = \frac{|\mathbf{v}_1|\ (\cos \widehat{\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1} - \cos \widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2} \cdot \cos \widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1})}{|\mathbf{u}_2|\ \operatorname{sen}^2 \widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2}}$$

y de las dos últimas

$$a_{21} = \frac{|\mathbf{v}_2|\ (\cos \widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2} - \cos \widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2} \cdot \cos \widehat{\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2})}{|\mathbf{u}_1|\ \operatorname{sen}^2 \widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2}}$$

$$a_{22} = \frac{|\mathbf{v}_2|\ (\cos \widehat{\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2} - \cos \widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2} \cdot \cos \widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2})}{|\mathbf{u}_2|\ \operatorname{sen}^2 \widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2}}$$

y si hacemos $\widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2} = \alpha$, $\widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1} = \alpha_1$ y $\widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2} = \alpha_2$, la expresión matricial del cambio de base es

$$(46) \qquad (x_1,\ x_2) = (x_1',\ x_2') \begin{pmatrix} \dfrac{|\mathbf{v}_1| \operatorname{sen}(\alpha - \alpha_1)}{|\mathbf{u}_1| \operatorname{sen} \alpha} & \dfrac{|\mathbf{v}_1| \operatorname{sen} \alpha_1}{|\mathbf{u}_2| \operatorname{sen} \alpha} \\ \dfrac{|\mathbf{v}_2| \operatorname{sen}(\alpha - \alpha_2)}{|\mathbf{u}_1| \operatorname{sen} \alpha} & \dfrac{|\mathbf{v}_2| \operatorname{sen} \alpha_2}{|\mathbf{u}_2| \operatorname{sen} \alpha} \end{pmatrix}$$

Si los vectores de ambas bases son unitarios (46) se reduce a

$$(47) \qquad (x_1,\ x_2) = (x_1',\ x_2') \begin{pmatrix} \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha - \alpha_1)}{\operatorname{sen} \alpha} & \dfrac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha} \\ \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha - \alpha_2)}{\operatorname{sen} \alpha} & \dfrac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha} \end{pmatrix}$$

Si la primera base es métrica, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, luego

$$(48) \qquad (x_1,\ x_2) = (x_1',\ x_2') \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \operatorname{sen} \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 & \operatorname{sen} \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Si es métrica la segunda base, $\alpha_2 = \alpha_1 \pm \dfrac{\pi}{2}$,

$$(49) \qquad (x_1,\ x_2) = (x_1',\ x_2') \begin{pmatrix} \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha - \alpha_1)}{\operatorname{sen} \alpha} & \dfrac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha} \\ \dfrac{\mp \cos(\alpha - \alpha_1)}{\operatorname{sen} \alpha} & \dfrac{\pm \cos \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha} \end{pmatrix}$$

y si lo son las dos

$$(50) \qquad (x_1,\ x_2) = (x_1',\ x_2') \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \operatorname{sen} \alpha_1 \\ \mp \operatorname{sen} \alpha_1 & \pm \cos \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que en este último caso la matriz que caracteriza el cambio de base es ortogonal y que su determinante vale 1 o -1, según que las dos bases determinen la misma o distinta orientación en el plano.

EJEMPLO 1. Si las bases $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de V_2 son tales que

$$|\mathbf{u}_1| = 2, \quad |\mathbf{u}_2| = 4, \quad \widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2} = 120°, \quad |\mathbf{v}_1| = 1, \quad |\mathbf{v}_2| = 3,$$
$$\widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1} = 60° \quad \text{y} \quad \widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2} = 30°,$$

la expresión matricial del cambio de base será

$$(x_1,\ x_2) = (x_1',\ x_2') \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$

EJERCICIOS

1. Los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ de una base de V_2 forman ángulo de 45° y sus módulos respectivos son 3 y 5. Sabiendo que la expresión de cambio a una segunda base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ es

$$(x_1,\ x_2) = (x_1',\ x_2') \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Calcúlense: $|\mathbf{v}_1|$, $|\mathbf{v}_2|$, $\widehat{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2}$ y $\widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2}$.

2. Póngase en forma matricial la expresión analítica del producto escalar en V_2: primero, respecto a la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ del ejercicio anterior; 2.º, respecto a la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de dicho ejercicio.

16.3. El plano euclídeo.

Se llama *plano euclídeo* al espacio afín asociado al espacio vectorial euclídeo V_2.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

Sean P y Q dos puntos del plano euclídeo y $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ sus respectivos vectores de posición respecto a un origen O. Si llamamos $d(P, Q)$ a la distancia entre ambos puntos, tendremos

$$d(P, Q) = |\{\overrightarrow{PQ}\}| = |\mathbf{q} - \mathbf{p}| = \sqrt{(\mathbf{q} - \mathbf{p})^2}. \tag{51}$$

Si las coordenadas de P respecto al sistema de referencia $\{O;\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2\}$ son (p_1, p_2) y las de Q, (q_1, q_2), de (51) obtenemos

$$d(P, Q) = \tag{52}$$

$$= \sqrt{(q_1 - p_1)^2 |\mathbf{u}_1|^2 + 2(q_1 - p_1)(q_2 - p_2)|\mathbf{u}_1|\,|\mathbf{u}_2| \cos \widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2} + (q_2 - p_2)^2 |\mathbf{u}_2|^2}$$

y si los vectores básicos son unitarios,

$$(53)\quad d(P,Q)=\sqrt{(q_1-p_1)^2+2(q_1-p_1)(q_2-p_2)\cos\alpha+(q_2-p_2)^2}$$

donde hemos llamado α a $\widehat{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2}$.

Si el sistema de referencia es métrico, es decir, si $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son ortonormales, $\alpha=90°$, y entonces

$$(54)\qquad d(P,Q)=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2}$$

La distancia entre dos puntos del plano euclídeo es una función

$$d:\ E_2\times E_2\longrightarrow R$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. $d(P,Q)\geq 0\ \forall\ (P,Q)\in E_2^2$ y $d(P,Q)=0$ si y sólo si $P=Q$.
2. $d(P,Q)=d(Q,P)\quad\forall\quad (P,Q)\in E_2^2$.
3. $d(P,Q)\leq d(P,R)+d(R,Q)$. (Propiedad triangular.)

Demostración:

1. $d(P,Q)=|\mathbf{q}-\mathbf{p}|\geq 0$. Si

$$d(P,Q)=0\Longrightarrow|\mathbf{p}-\mathbf{q}|=0\Longrightarrow\mathbf{p}-\mathbf{q}=0\Longrightarrow\mathbf{p}=\mathbf{q}$$

y, recíprocamente, si

$$P=Q\Longrightarrow\mathbf{p}=\mathbf{q}\Longrightarrow\mathbf{q}-\mathbf{p}=0\Longrightarrow|\mathbf{q}-\mathbf{p}|=0\Longrightarrow d(P,Q)=0.$$

2. Es consecuencia de ser

$$|\mathbf{q}-\mathbf{p}|=|\mathbf{p}-\mathbf{q}|.$$

3. $$d(P,Q)=|\mathbf{q}-\mathbf{p}|=|\mathbf{q}-\mathbf{r}+\mathbf{r}-\mathbf{p}|\leq|\mathbf{q}-\mathbf{r}|+|\mathbf{r}-\mathbf{p}|=$$
$$=d(Q,R)+d(P,R).$$

Se llama *espacio métrico* a todo conjunto E, tal que existe una función

$$d:\ E\times E\longrightarrow R$$

que cumple las siguientes propiedades:

M_1. $d(x,x)=0\quad\forall\quad x\in E$.

M_2. $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.

A la función d se le llama *función de distancia.*

Como consecuencia de lo que hemos visto más arriba, el plano euclídeo es un espacio métrico.

EJEMPLO 1. Si $\widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2} = 60^\circ$ y las coordenadas de los puntos P y Q respecto al sistema de referencia $\{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ son $(4, -1)$ y $(3, 7)$, respectivamente, entonces

$$d(P, Q) = \sqrt{(3-4)^2 + 2(3-4)(7+1)\tfrac{1}{2} + (7+1)^2} = \sqrt{57}.$$

EJEMPLO 2. El conjunto de los números reales con la función $d: R^2 \longrightarrow R$ definida mediante

$$d(x, y) = |x - y| \quad \forall \quad x, y \in R$$

es un espacio métrico. En efecto,

$$d(x, x) = |x - x| = 0,$$

luego se cumple M_1;

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y),$$

y se cumple M_2.

ECUACIÓN NORMAL DE LA RECTA.

Sea la recta r de ecuación general

$$ax_1 + bx_2 + c = 0 \tag{55}$$

respecto a un sistema de referencia métrico. Si $P \in r$ tenemos

$$ap_1 + bp_2 + c = 0$$

y restando miembro a miembro ambas ecuaciones, obtenemos

$$a(x_1 - p_1) + b(x_2 - p_2) = 0 \tag{56}$$

pero, puesto que los puntos X y P pertenecen a r,

$$(x_1 - p_1,\ x_2 - p_2)$$

es un vector de dirección de r, luego, en virtud de (45′), el vector (a, b) tiene su dirección perpendicular a la de r. Si dividimos (55) por el módulo de este último vector, obtenemos

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} x_1 + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} x_2 + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0 \tag{57}$$

que es la llamada *ecuación normal* de la recta r. La significación geométrica de los coeficientes de x_1 y x_2 es la de coordenadas de un vector unitario perpendicular a la recta. Ahora bien, si $\mathbf{v}$ es un vector unitario y la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es métrica, se tiene que

$$\mathbf{v} = \cos \widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}}\, \mathbf{u}_1 + \operatorname{sen} \widehat{\mathbf{u}_2, \mathbf{v}}\, \mathbf{u}_2,$$

luego en la ecuación normal de la recta, los coeficientes de x_1 y x_2 son, respectivamente, el coseno y el seno del ángulo que forma el vector $\mathbf{u}_1$ con un vector perpendicular a r. Se llama a dichos coeficientes *cosenos directores* de la recta.

EJEMPLO 3. Los cosenos directores de la recta $3x_1+x_2-5=0$ son $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ y $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$; el ángulo que forma $\mathbf{u}_1$ con una perpendicular a r es $\varphi = \arccos \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ y la ecuación normal de r es

$$\frac{3}{\sqrt{10}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} x_2 - \frac{5}{\sqrt{10}} = 0.$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

Sea r la recta de ecuación (55) respecto a un sistema de referencia métrico y P un punto de coordenadas (p_1, p_2). Llamemos $d(P, r)$ a la distancia del punto a la recta, la cual será igual a $d(P, P')$, donde P' es el pie de la perpendicular trazada por P a r. Si Q es un punto cualquiera de r, tenemos:

$$d(P, r) = d(P, P') = \operatorname{pr}_{PP'} \overrightarrow{QP} = \{\overrightarrow{QP}\} \cdot \mathbf{u}$$

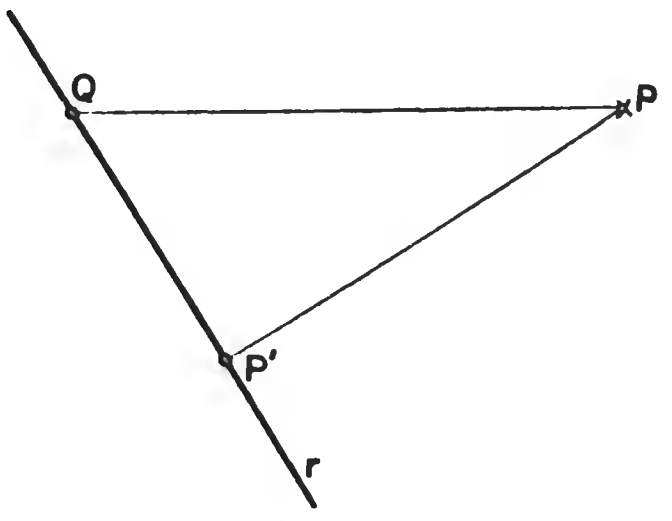


FIG. 3.

donde **u** es un vector unitario en la dirección de $\{\overrightarrow{PP'}\}$, es decir, un vector unitario perpendicular a r, luego

$$\mathbf{u} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right).$$

Entonces

$$(58) \qquad d(P,r) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}(p_1-q_1) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}(p_2-q_2) = \frac{ap_1+bp_2+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

puesto que por ser $Q \in r$ se verifica

$$-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}q_1 - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}q_2 = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

La igualdad (58) nos dice que para hallar la distancia de un punto a una recta hay que sustituir x_1 y x_2 en la ecuación normal de la recta r, por las cordenadas del punto P.

La distancia del origen O a la recta r vendrá dada por

$$d(O,r) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

lo que nos da la interpretación geométrica del término independiente de la ecuación normal de una recta, es decir, (55) se puede escribir en la forma

$$(59) \qquad \cos\varphi\, x_1 + \operatorname{sen}\varphi\, x_2 + d(O,r) = 0.$$

EJEMPLO 4. La distancia del punto P (5, 7) a la recta r del ejemplo anterior es

$$d(P,r) = \frac{3\cdot 5 + 1\cdot 7 - 5}{\sqrt{10}} = \frac{17}{\sqrt{10}}.$$

Obsérvese que la distancia de un punto a una recta, calculada mediante la fórmula (58) pudiera resultar negativa. Puesto que la distancia es siempre un número no negativo, habría que tomar el valor absoluto del resultado. La significación geométrica del signo que aparece en la citada fórmula es la siguiente: a puntos situados en un mismo semiplano de los dos determinados por r les corresponde el mismo signo, y signo opuesto a dos puntos situados en semiplanos distintos.

EJEMPLO 5. El punto $Q\,(-2,\,1)$ está situado en distinto semiplano que el P del ejemplo anterior, de los dos determinados por la recta r, pues

$$d(P,r)=\frac{17}{\sqrt{10}}>0$$

y

$$d(Q,r)=\frac{3(-2)+1\cdot 1-5}{\sqrt{10}}=-\sqrt{10}<0.$$

ECUACIÓN ORDINARIA DE LA RECTA.

Sea r la recta de ecuación (55) respecto a un sistema de referencia métrico. Llamemos β al ángulo que forma el vector básico $\mathbf{u}_1$ con el vector de dirección de la recta $v=(b,\,-a)$, tenemos

$$\cos\beta=\cos\widehat{\mathbf{u}_1,\,\mathbf{v}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\operatorname{sen}\beta=\cos\widehat{\mathbf{u}_2,\,\mathbf{v}}=\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

de donde $\operatorname{tg}\beta=-\dfrac{a}{b}$, luego la ecuación de la recta se puede escribir en la forma

$$x_2=mx_1+h \tag{60}$$

donde

$$m=-\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\beta \quad \text{y} \quad h=-\frac{c}{b}.$$

A la ecuación (60) se le llama *ecuación ordinaria* de la recta r. Si en (60) hacemos $x_1=0$, obtenemos $x_2=h$, luego h es la ordenada del punto de intersección de r con el eje de ordenadas. Se suele llamar a *h ordenada en el origen* y a *m pendiente* de la recta.

EJEMPLO 6. La recta r de los ejercicios anteriores tiene pendiente $m=-3$ y ordenada en el origen 5.

ANGULO DE DOS RECTAS.

Sea la recta r de ecuación (55) y otra recta s de ecuación

$$a'x_1+b'x_2+c'=0$$

respecto al mismo sistema de referencia métrico. Se llama ángulo de r y s al menor de los ángulos que forman dichas rectas. Tenien-

do en cuenta que $\mathbf{v}=(b, -a)$ es un vector de dirección de r y $\mathbf{w}=(b', -a')$ lo es de s, tenemos

$$\cos \widehat{r, s}=\frac{|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}|}{|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|}=\frac{|aa'+bb'|}{\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{a'^2+b'^2}} \tag{61}$$

Hemos tomado el valor absoluto del numerador, ya que al ser $\widehat{r, s} \leq 90°$, $\cos \widehat{r, s} \geq 0$.

Para que las rectas r y s sean perpendiculares se tiene que verificar que $\cos \widehat{r, s}=0$, luego $aa'+bb'=0$.

Si r y s vienen dadas por sus ecuaciones ordinarias

$$r \equiv x_2=mx_1+h$$
$$s \equiv x_2=m'x_1+h'$$

sabemos por trigonometría que

$$\operatorname{tg} \widehat{r, s}=\operatorname{tg}(\beta-\beta')=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\beta'}{1+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\beta'}=\frac{m-m'}{1+mm'} \tag{62}$$

Si $\widehat{r, s}=90°$, $\operatorname{tg} \widehat{r, s}=\infty$, luego para que las rectas sean perpendiculares se tiene que verificar

$$1+mm'=0. \tag{63}$$

EJEMPLO 7. Si

$$r \equiv 2x_1-3x_2+4=0$$
$$s \equiv 5x_1+4x_2-3=0$$
$$\widehat{r, s}=\operatorname{arc\,cos}\frac{2\cdot 5+(-3)4}{\sqrt{4+9}\,\sqrt{25+16}}=\operatorname{arc\,cos}\frac{-2}{\sqrt{533}}$$

ĖJEMPLO 8. Si

$$r \equiv x_2=\quad 3x_1+4$$
$$s \equiv x_2=-6x_1+2$$
$$\widehat{r, s}=\operatorname{arc\,tg}\frac{3-(-6)}{1+3(-6)}=\operatorname{arc\,tg}\frac{9}{-17}.$$

AREA DEL TRIÁNGULO.

Sea el triángulo cuyos vértices P, Q y R tienen por coordenadas respecto a un sistema de referencia métrico (p_1, p_2), (q_1, q_2) y (r_1, r_2), respectivamente. Sabemos por geometría elemental que:

Area del triángulo $=\frac{1}{2}$ la longitud de uno de los lados por la longitud de la altura correspondiente.

La longitud del lado PQ es

$$d(P,Q)=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2}$$

La longitud de la altura correspondiente es igual a $d(R,r)$, habiendo llamado r a la recta determinada por los puntos P y Q. La ecuación de esta recta es

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & p_1 & p_2 \\ 1 & q_1 & q_2 \end{vmatrix}=0$$

y su ecuación normal

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & p_1 & p_2 \\ 1 & q_1 & q_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2}}=0$$

luego

$$d(R,r)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ 1 & p_1 & p_2 \\ 1 & q_1 & q_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2}}$$

luego, si llamamos A al área del triángulo PQR, tendremos

$$(64)\qquad A=\tfrac{1}{2}\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2}\,\frac{\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ 1 & p_1 & p_2 \\ 1 & q_1 & q_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2}}=$$

$$\|\qquad =\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ 1 & p_1 & p_2 \\ 1 & q_1 & q_2 \end{vmatrix}$$

Obsérvese que la fórmula anterior puede dar valores positivos o negativos. Como el área de una superficie viene medida por un número real no negativo, habrá que tomar el valor absoluto del resultado. El signo dependerá del orden de las filas de la matriz del determinante que figura en dicha fórmula, es decir, dependerá del sentido en que se supongan recorridos los vértices del triángulo.

EJEMPLO 9. El área del triángulo de vértices $P\,(3,2)$, $Q\,(-1,4)$, $R\,(2,2)$ es

$$A=\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=1.$$

EJERCICIOS

En los ejercicios siguientes se considerará el sistema de referencia métrico, salvo que se indique otra cosa.

1. Hállense las ecuaciones de las bisectrices del triángulo cuyos vértices son A (3, 2), B (1, −1), C (4, 0).

2. Hállense: primero, las coordenadas del vértice A de un triángulo siendo los otros dos B (6, 5) y C (0, 2) y la longitud de los lados AB y AC 6 y 12 unidades, respectivamente; segundo, el ortocentro de dicho triángulo.

3. Hállese la recta del haz de vértice $V=r_1 \cap r_2$ que forma ángulo de 45° con la recta determinada por los puntos A (2, 1) y B (3, 5), siendo

$$r_1 \equiv x_1+2x_2-3=0$$
$$r_2 \equiv 5x_1-x_2+4=0.$$

4. Hállense los cosenos directores de una recta cuando su ecuación viene dada respecto a un sistema de referencia en el que los vectores básicos son unitarios y forman ángulo α. (Se dice que los ejes del sistema de referencia son oblicuos.) Aplicación a la recta

$$3x_1-5x_2+7=0$$

y $\alpha=45°$.

5. Hállese la fórmula que da la distancia de un punto P a una recta r en ejes oblicuos. Aplicación a la recta

$$r \equiv 3x_1+6x_2-1=0$$

el punto P (2, 3) y ejes que formen ángulo de 30°.

6. Hállese el ángulo de dos rectas en ejes oblicuos. Aplicación a las rectas

$$r \equiv x_1-2x_2+3=0$$
$$s \equiv x_1+x_2+1=0.$$

Angulo de los ejes 120°.

7. Hállese la fórmula que da el área de un triángulo en función de las coordenadas de sus vértices, en ejes oblicuos. Aplicación al triángulo de vértices A (3, 3), B (1, 2), C (4, −2). Angulo de los ejes 60°.

8. Hállese la recta del haz de vértice (−5, −1) tal que, cortando a los lados AB y AC del triángulo de vértices A (0, 4), B (−3, −2), C (4, 0), divida a éste en dos partes de áreas iguales.

9. Ecuación de las rectas que distan dos unidades de longitud del punto (1, −1) y pasan por la intersección de las

$$r \equiv x_1+x_2-1=0$$
$$s \equiv 2x_1-x_2+1=0.$$

10. Hállense los vértices y las ecuaciones de los lados de un cuadrado, una de cuyas diagonales es AC, $A(2, -3)$, $C(1, 4)$.

11. Hállense los vértices de un triángulo equilátero de lado 4 cm que tenga el lado AB sobre el eje OX y el vértice A en el origen.

12. Las rectas r y s tienen las ecuaciones siguientes:

$$r \equiv x_1 - 2x_2 + 3 = 0$$
$$s \equiv 4x_1 + x_2 - 1 = 0$$

respecto al sistema de referencia $\{O;\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2\}$ siendo $|\mathbf{u}_1| = 2$, $|\mathbf{u}_2| = 5$ y $\widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2} = 30^\circ$. Hállese el ángulo que forman.

13. Hállense las proyecciones ortogonales del punto P (3, 2) sobre las rectas

$$r_1 \equiv x_1 + 2x_2 - 2 = 0$$
$$r_2 \equiv x_1 - x_2 = 0$$
$$r_3 \equiv 3x_1 + 5x_2 + 1 = 0$$

y calcúlese el área del triángulo que tienen dichas proyecciones por vértices.

14. Hállese la condición que deben cumplir las coordenadas de los puntos del plano desde los que se ve el segmento AB $(A(a_1, a_2)B(b_1, b_2))$ bajo un ángulo recto. Primero, cuando el sistema de referencia es métrico; segundo, cuando los vectores básicos son unitarios y forman ángulo de 60°.

15. Dados los haces de rectas de vértices P $(4, -2)$ y $Q = r_1 \cap r_2$, siendo

$$r_1 \equiv 2x_1 + 2x_2 - 3 = 0$$
$$r_2 \equiv x_1 - 3x_2 + 1 = 0$$

hállese: primero, ecuación de la aplicación que a cada recta de un haz asocia su perpendicular en el otro; segundo, la transformada mediante esta aplicación de la recta del primer haz que pasa por el punto R $(5, -1)$, y tercero, condición que deben cumplir las coordenadas de los puntos intersección de las rectas homólogas.

16.4. Cambio de sistema de referencia en el plano euclídeo.

Sean los sistemas de referencia del plano euclídeo $\{O;\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2\}$ y $\{\bar{O};\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2\}$ tales que las coordenadas de $\bar{O}$ respecto al primer sistema son $(a_{o1},\ a_{o2})$ y la relación que liga ambas bases viene dada por

$$\mathbf{v}_1 = a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{12}\mathbf{u}_2$$
$$\mathbf{v}_2 = a_{21}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2$$

entonces, de acuerdo con [12.1] la expresión matricial de las fórmulas de cambio de sistema de referencia es

$$(1,\ x_1,\ x_2) = (1,\ x_1',\ x_2') \begin{pmatrix} 1 & a_{o1} & a_{o2} \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Si recordamos la interpretación geométrica de las a_{ij} $(i,\ j = 1,\ 2)$ dadas en [17.2] tendremos para el caso general

$$(65) \qquad (1,\ x_1,\ x_2) = (1,\ x_1',\ x_2') \begin{pmatrix} 1 & a_{o1} & a_{o2} \\ 0 & \dfrac{|\mathbf{v}_1| \operatorname{sen} (\alpha - \alpha_1)}{|\mathbf{u}_1| \operatorname{sen} \alpha} & \dfrac{|\mathbf{v}_1| \operatorname{sen} \alpha_1}{|\mathbf{u}_2| \operatorname{sen} \alpha} \\ 0 & \dfrac{|\mathbf{v}_2| \operatorname{sen} (\alpha - \alpha_2)}{|\mathbf{u}_1| \operatorname{sen} \alpha} & \dfrac{|\mathbf{v}_2| \operatorname{sen} \alpha_2}{|\mathbf{u}_2| \operatorname{sen} \alpha} \end{pmatrix}$$

y si los vectores de ambas bases son unitarias

$$(66) \qquad (1,\ x_1,\ x_2) = (1,\ x_1',\ x_2') \begin{pmatrix} 1 & a_{o1} & a_{o2} \\ 0 & \dfrac{\operatorname{sen} (\alpha - \alpha_1)}{\operatorname{sen} \alpha} & \dfrac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha} \\ 0 & \dfrac{\operatorname{sen} (\alpha - \alpha_2)}{\operatorname{sen} \alpha} & \dfrac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen} \alpha} \end{pmatrix}$$

y si además el primer sistema de referencia es métrico, es decir, si los vectores básicos son ortogonales y unitarios

$$(67) \qquad (1,\ x_1,\ x_2) = (1,\ x_1',\ x_2') \begin{pmatrix} 1 & a_{o1} & a_{o2} \\ 0 & \cos \alpha_1 & \operatorname{sen} \alpha_1 \\ 0 & \cos \alpha_2 & \operatorname{sen} \alpha_2 \end{pmatrix}$$

o si lo es el segundo sistema

$$(68) \qquad (1,\ x_1,\ x_2) = (1,\ x_1',\ x_2') \begin{pmatrix} 1 & a_{o1} & a_{o2} \\ 0 & \dfrac{\operatorname{sen} (\alpha - \alpha_1)}{\operatorname{sen} \alpha} & \dfrac{\operatorname{sen} \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha} \\ 0 & \dfrac{\mp \cos (\alpha - \alpha_1)}{\operatorname{sen} \alpha} & \dfrac{\pm \cos \alpha_1}{\operatorname{sen} \alpha} \end{pmatrix}$$

y en el caso de que sean métricos los dos sistemas

$$(69) \qquad (1,\ x_1,\ x_2) = (1,\ x_1',\ x_2') \begin{pmatrix} 1 & a_{o1} & a_{o2} \\ 0 & \cos \alpha_1 & \operatorname{sen} \alpha_1 \\ 0 & \mp \operatorname{sen} \alpha_1 & \pm \cos \alpha_1 \end{pmatrix}$$

en donde los signos superiores corresponden al caso en que ambos sistemas definen la misma orientación en el plano y los inferiores al caso contrario.

EJEMPLO 1. Si el sistema de referencia $\{O;\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2\}$ es métrico y el $\{\bar{O};\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2\}$ es tal que las coordenadas de $\bar{O}$ respecto al primero son $(3,\ 2)$ y $\widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1} = 30°$ y $\widehat{\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2} = -45°$, la expresión matricial del cambio de sistema será

$$(1,\ x_1,\ x_2) = (1,\ x_1',\ x_2') \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

1. Hállese la expresión matricial del cambio de sistema de referencia, siendo métrico el sistema original y teniendo el segundo por origen la intersección de las rectas

$$r \equiv 2x_1 + 3x_2 + 5 = 0$$
$$s \equiv x_1 + 5x_2 + 13 = 0$$

y por vectores básicos $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ vectores unitarios de dirección de r y s, respectivamente. ¿Cuántos casos existen?

JAR'23

17

El espacio euclideo tridimensional

17.1. Producto escalar.

La definición de producto escalar dada para V_2 en [16.1], así como las propiedades 1 a 3, las definiciones de forma cuadrática asociada y de norma, la identidad (39), las desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Minkowsky y la expresión (42), que da el coseno del ángulo de dos vectores, son igualmente válidas en V_3.

EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO ESCALAR.

Mediante un cálculo análogo al efectuado para el caso de dos dimensiones se comprobaría que

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 \tag{70}$$

siendo (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) las coordenadas de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ respecto a una base métrica. Y análogamente

$$|\mathbf{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

$$\cos\mathbf{x},\mathbf{y}=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\,\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}$$

La condición de perpendicularidad es ahora

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0. \tag{71}$$

EJERCICIOS

1. Hállese el ángulo que forma la diagonal de un cubo con una de sus aristas.

2. Dados los vectores $\mathbf{u}=3\mathbf{u}_1-2\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3$ y $\mathbf{v}=\mathbf{u}_1+4\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3$, hállese su producto escalar, sus módulos, el ángulo que forman y la proyección ortogonal de cada uno sobre el otro. Se supone la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ métrica.

3. Determínese λ para que los vectores

$$\mathbf{v}=3\mathbf{u}_1-2\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{w}=2\mathbf{u}_1-\lambda\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3$$

sean perpendiculares.

4. Demuéstrese que si L es una variedad lineal de V_3, el conjunto de todos los vectores de V_3 perpendiculares a todos los vectores de L es otra variedad, que se llama *variedad ortogonal* de L.

5. Hállese la variedad ortogonal de

$$L\equiv 3x_1+4x_2-5x_3=0.$$

6. Hállese la variedad ortogonal de

$$L\equiv\begin{cases} x_1=3\lambda \\ x_2=4\lambda \\ x_3=-\lambda. \end{cases}$$

17.2. Producto vectorial. Propiedades.

Se llama *producto vectorial* o *exterior* de dos vectores libres $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ de V_3 y se denota por $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$, a otro vector tal que:

1.°, $|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|=|\mathbf{v}||\mathbf{w}||\operatorname{sen}\widehat{\mathbf{v},\mathbf{w}}|$,

2.°, su dirección es perpendicular a las de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$,

3.°, su sentido es tal que la orientación determinada en E_3 por la terna $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ sea la misma que la determinada por los vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ que se han elegido como básicos.

La propiedad 1 de la definición nos da una interpretación geométrica de $|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|$. Si $\{\overrightarrow{OV}\}=\mathbf{v}$ y $\{\overrightarrow{OW}\}=\mathbf{w}$, la altura h del paralelogramo de lados OV y OW es $h=|\mathbf{w}||\operatorname{sen}\widehat{\mathbf{v},\mathbf{w}}|$, luego

$$|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|=|\mathbf{v}||\mathbf{w}||\operatorname{sen}\widehat{\mathbf{v},\mathbf{w}}|$$

es el área de dicho paralelogramo.

PROPIEDADES.

1. $\mathbf{v}\times\mathbf{w}=-\mathbf{w}\times\mathbf{v}\ \ \forall\ \mathbf{v},\mathbf{w}\in V_3$. Se expresa diciendo que el producto vectorial es *anticonmutativo*.

Esta propiedad es consecuencia inmediata de la definición.

2. $\lambda\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\mathbf{v}\times\lambda\mathbf{w}=\lambda(\mathbf{v}\times\mathbf{w}),\quad \forall\quad \mathbf{v},\mathbf{w}\in V\quad \text{y}\quad \lambda\in R.$

Demostraremos únicamente que $\lambda\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\lambda(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$. Pueden ocurrir los siguientes casos:

a) $\lambda = 0$. En este caso la comprobación de la propiedad es trivial.

b) Si $\lambda > 0$ la propiedad es consecuencia de ser

$$|\lambda\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\lambda|\,|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,|\operatorname{sen} \widehat{\lambda\mathbf{v}, \mathbf{w}}| = \lambda|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,|\operatorname{sen} \widehat{\mathbf{v}, \mathbf{w}}| = \lambda|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|,$$

dirección $\lambda\mathbf{v}$ = dirección $\mathbf{v}$, y sentido $\lambda\mathbf{v}$ = sentido $\mathbf{v}$.

c) Si

$$\lambda < 0 \Longrightarrow |\lambda\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\lambda|\,|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,|\operatorname{sen} \widehat{\lambda\mathbf{v}, \mathbf{w}}| =$$

$$= -\lambda\,|\mathbf{v}\ \ \mathbf{w}|\,|\operatorname{sen}(\pi + \widehat{\mathbf{v}, \mathbf{w}})| = -\lambda|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,|\operatorname{sen} \widehat{\mathbf{v}, \mathbf{w}}| =$$

$$= |\lambda|\,|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\lambda(\mathbf{v} \times \mathbf{w})|,$$

dirección $\lambda\mathbf{v}$ = dirección $\mathbf{v}$, y sentido $\lambda\mathbf{v}$ opuesto a sentido de $\mathbf{v}$, luego $\lambda\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ y $\lambda(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido y, por tanto, son iguales.

3. $\mathbf{v} \times (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ (propiedad distributiva).

Veamos previamente como, dados los representantes $\overrightarrow{OV}$, $\overrightarrow{OW}$ de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, podemos construir gráficamente el representante de $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ con origen en el punto fijo O.

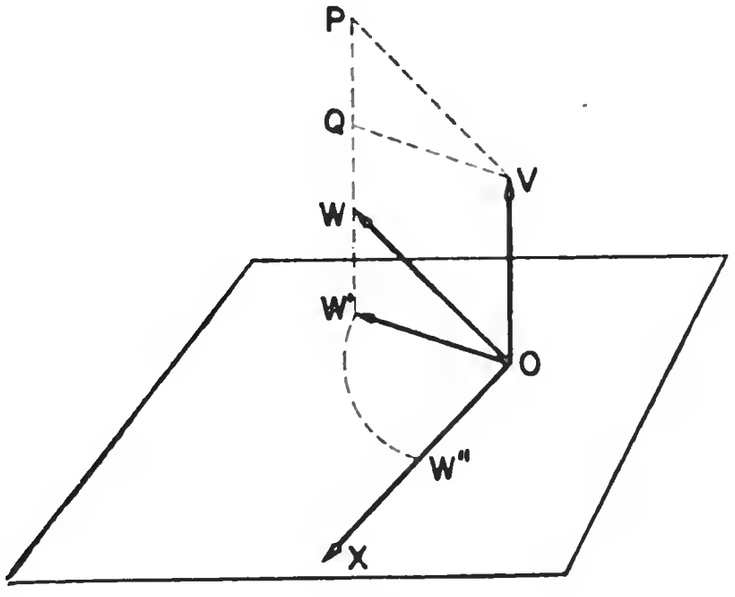


FIG. 4.

Sea π el plano perpendicular a $\overrightarrow{OV}$ por O y $\overrightarrow{OW'}$ la proyección ortogonal de $\overrightarrow{OW}$ sobre π. Tenemos

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = \text{área } (OVPW) = \text{área } (OVQW') = |\mathbf{v} \times \mathbf{w}'|$$

donde hemos llamado $\mathbf{w}'$ a $\{\overrightarrow{OW'}\}$. Además $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{w}'$ coplanarios y $\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{w}}$ y $\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{w}'}$ tienen el mismo sentido, luego

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}'.$$

Ahora bien, $\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{w}'} = 90°$, por tanto $|\mathbf{v} \times \mathbf{w}'| = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}'|$, lo que junto con el hecho de que $\mathbf{v} \times \mathbf{w}'$ ha de ser perpendicular a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}'$ nos da la siguiente construcción del representante $\overrightarrow{OX}$ de $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ buscado.

Se proyecta $\overrightarrow{OW}$ ortogonalmente sobre el plano π perpendicular a $\overrightarrow{OV}$ por O, obteniéndose $\overrightarrow{OW'}$; se gira $\overrightarrow{OW'}$ 90° alrededor de O en el plano π (el sentido de giro dependerá de la orientación que determine el triedro básico en E_3) con lo que se obtiene $\overrightarrow{OW''}$ y, por último, se multiplica $\overrightarrow{OW''}$ por $|\mathbf{v}|$ con lo que se llega a $\overrightarrow{OX}$, que es el resultado buscado.

Obsérvese que las dos últimas operaciones equivalen a someter a $\overrightarrow{OW'}$ a una semejanza producto de un giro en π de 90°, con centro en O y a una homotecia de razón $|\mathbf{v}|$. Denotaremos a esta semejanza por S y al transformado OW'' de OW' por $S(OW')$.

Sean ahora $\{\overrightarrow{OV}\} = \mathbf{v}$, $\{\overrightarrow{OW}\} = \mathbf{w}$, $\{\overrightarrow{OU}\} = \mathbf{u}$ y $\pi \perp \overrightarrow{OV}$. Con lo que $\{\overrightarrow{OP}\} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$. Apliquemos la construcción anterior para hallar los representantes de $\mathbf{v} \times (\mathbf{w} + \mathbf{u})$, $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ con origen en O.

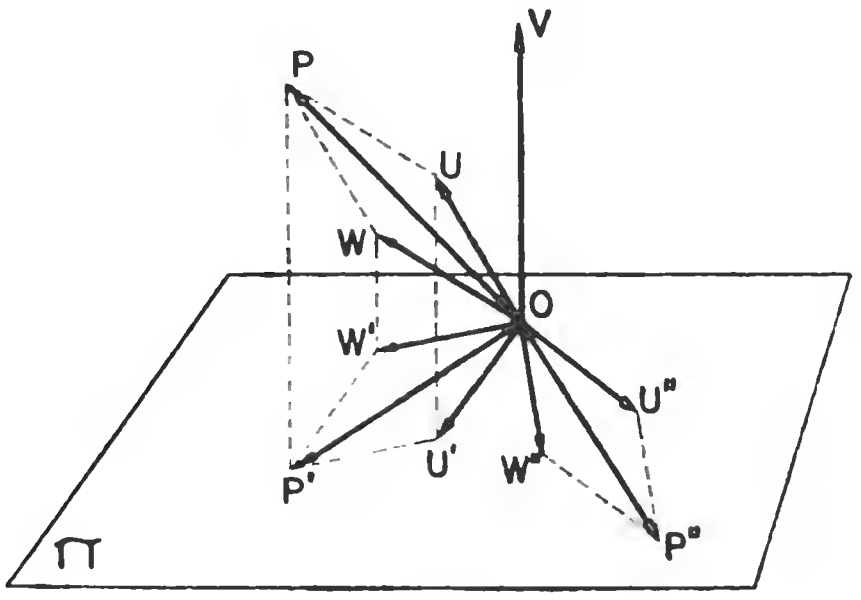


FIG. 5.

Tenemos que $\mathrm{pr}_\pi \overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OW'}$, $\mathrm{pr}_\pi \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP'}$, $\mathrm{pr}_\pi \overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OU'}$ y $S(\overrightarrow{OW'}) = \overrightarrow{OW''}$, $S(\overrightarrow{OP'}) = \overrightarrow{OP''}$, $S(\overrightarrow{OU'}) = \overrightarrow{OU''}$, pero la proyección

ortogonal de un paralelogramo es otro paralelogramo y el transformado de un paralelogramo mediante una semejanza es nuevamente otro paralelogramo. En definitiva, O, W'', P'' y U'' son los vértices de un paralelogramo, luego

$$\{\overrightarrow{OP''}\} = \{\overrightarrow{OW''}\} + \{\overrightarrow{OU''}\}$$

pero

$$\{\overrightarrow{OP''}\} = \mathbf{v} \times (\mathbf{w} + \mathbf{u}), \quad \{\overrightarrow{OW''}\} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} \quad \text{y} \quad \{\overrightarrow{OU''}\} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

de donde

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{w} + \mathbf{u}) = \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{u}.$$

En virtud de las propiedades 2 y 3, el producto vectorial es una aplicación bilineal de $V_3 \times V_3$ en V_3. Como consecuencia de la propiedad 1 dicha aplicación bilineal es antisimétrica o alternada.

4. Si $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$ y $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ no son nulos, entonces son paralelos. En efecto, de $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0 \Longrightarrow |\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = 0$ y de esto y $|\mathbf{v}| \neq 0$ y $|\mathbf{w}| \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{sen} \widehat{\mathbf{v}, \mathbf{w}} = 0 \Longrightarrow \widehat{\mathbf{v}, \mathbf{w}} = k\pi$, siendo $k \in Z$.

EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO VECTORIAL.

Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base ortonormal o métrica de V_3, tenemos

$$\mathbf{u}_i \times \mathbf{u}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

(72)

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3, \quad \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2,$$

luego si

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{u}_1 + v_2 \mathbf{u}_2 + v_3 \mathbf{u}_3$$
$$\mathbf{w} = w_1 \mathbf{u}_1 + w_2 \mathbf{u}_2 + w_3 \mathbf{u}_3$$

entonces, en virtud de las propiedades 1, 2 y 3 y de las relaciones anteriores:

(73) $$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_1 \mathbf{u}_1 + v_2 \mathbf{u}_2 + v_3 \mathbf{u}_3)(w_1 \mathbf{u}_1 + w_2 \mathbf{u}_2 + w_3 \mathbf{u}_3) =$$
$$= (v_2 w_3 - v_3 w_2)\mathbf{u}_1 + (v_3 w_1 - v_1 w_3)\mathbf{u}_2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\mathbf{u}_3$$

expresión más fácil de recordar en la siguiente forma:

(74) $$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

cuyo segundo miembro se supone que ha de desarrollarse formalmente por los elementos de la primera fila.

EJEMPLO 1. Si

$$\mathbf{v}=3\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2-4\mathbf{u}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{w}=\mathbf{u}_1-2\mathbf{u}_2+3\mathbf{u}_3$$

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=-2\mathbf{u}_1-13\mathbf{u}_2-8\mathbf{u}_3.$$

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que $\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_3$ se verifica

$$|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|^2+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})^2=\|\mathbf{v}\|\ \|\mathbf{w}\|.$$

2. Demuéstrese vectorialmente el teorema de los senos para un triángulo.

3. Pruébese que si $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0$ y $\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\mathbf{0}$ entonces $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ o $\mathbf{w}=\mathbf{0}$.

4. Sea $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ y $\mathbf{v}$ perpendicular a $\mathbf{u}$. Si $\lambda \in R$, demuéstrese que el sistema

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{x}=0, \qquad \mathbf{u}\times\mathbf{x}=\mathbf{v}$$

es compatible y determinado.

17.3. Producto mixto. Propiedades.

Se llama *producto mixto* de los vectores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{z}$ al escalar

$$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{z}).$$

Se suele omitir el paréntesis, ya que la expresión $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\times\mathbf{z}$ carece de sentido. Emplearemos la notación siguiente:

$$[\mathbf{v},\ \mathbf{w},\ \mathbf{z}]=\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\times\mathbf{z}.$$

El valor absoluto del producto mixto tiene la siguiente interpretación geométrica: sean $\{\overrightarrow{OV}\}=\mathbf{v}$, $\{\overrightarrow{OW}\}=\mathbf{w}$, $\{\overrightarrow{OZ}\}=\mathbf{z}$. El área de la base del paralelepípedo de aristas OV, OW, OZ, determinada por los puntos O, W, Z es

$$A=|\mathbf{w}\times\mathbf{z}|$$

y la longitud de la altura del citado paralelepípedo relativa a dicha

base es $h = |\mathbf{v}| |\cos \alpha|$, siendo α el ángulo formado por $\mathbf{v}$ con la perpendicular a la base, o lo que es lo mismo, con $\mathbf{w} \times \mathbf{u}$, luego

$$V = A \cdot h = |\mathbf{w} \times \mathbf{z}| \, |\mathbf{v}| \, |\cos \alpha| = |\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \times \mathbf{z}|$$

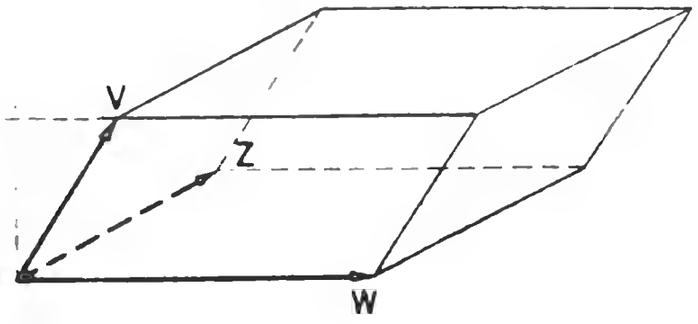


FIG. 6.

Como consecuencia inmediata de este resultado, tenemos que la condición necesaria y suficiente para que tres vectores no nulos $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{z}$ sean coplanarios es que su producto mixto valga cero.

EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO MIXTO.

Si

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{u}_1 + v_2\mathbf{u}_2 + v_3\mathbf{u}_3, \qquad \mathbf{w} = w_1\mathbf{u}_1 + w_2\mathbf{u}_2 + w_3\mathbf{u}_3$$

y

$$\mathbf{z} = z_1\mathbf{u}_1 + z_2\mathbf{u}_2 + z_3\mathbf{u}_3,$$

tenemos que

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}] = v_1(w_2z_3 - w_3z_2) + v_2(w_3z_1 - w_1z_3) + v_3(w_1z_2 - w_2z_1) =$$

$$= \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

PROPIEDADES.

1.

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}] = [\mathbf{w}, \mathbf{z}, \mathbf{v}] = [\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{z}] =$$
$$= -[\mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{z}, \mathbf{w}, \mathbf{v}].$$

Es consecuencia inmediata de la expresión analítica de $[\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}]$ y de la propiedad 4 de [10.2] de los determinantes.

2.

$$[\mathbf{v}+\mathbf{v}',\ \mathbf{w}+\mathbf{w}',\ \mathbf{z}+\mathbf{z}'] = [\mathbf{v},\ \mathbf{w},\ \mathbf{z}] + [\mathbf{v},\ \mathbf{w},\ \mathbf{z}'] + [\mathbf{v},\ \mathbf{w}',\ \mathbf{z}] + [\mathbf{v},\ \mathbf{w}'\ \mathbf{z}'] + [\mathbf{v}',\ \mathbf{w},\ \mathbf{z}] + [\mathbf{v}',\ \mathbf{w},\ \mathbf{z}'] + [\mathbf{v}',\ \mathbf{w}',\ \mathbf{z}] + [\mathbf{v}',\ \mathbf{w}',\ \mathbf{z}'],$$

es consecuencia de la propiedad 2 de [10.2].

3.

$$[\lambda\mathbf{v},\ \mu\mathbf{w},\ \nu\mathbf{z}] = \lambda\mu\nu[\mathbf{v},\ \mathbf{w},\ \mathbf{z}].$$

Es consecuencia de la propiedad 3 de [10.2].

En virtud de las propiedades 2 y 3, el producto mixto es una *forma trilineal* y por verificarse la propiedad 1, dicha forma es *alternada*.

EJEMPLO 1. Si

$$\mathbf{u}=3\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3, \quad \mathbf{v}=2\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{w}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2+4\mathbf{u}_3$$

$$[\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}] = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -2.$$

EJERCICIOS

1. Hállese λ para que los vectores

$$\mathbf{u}=2\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2-3\mathbf{u}_3, \quad \mathbf{v}=\lambda\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_3, \quad \mathbf{w}=3\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$$

sean coplanarios.

2. Si

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{u}+x_2\mathbf{v}+x_3\mathbf{w}, \quad \mathbf{y}=y_1\mathbf{u}+y_2\mathbf{v}+y_3\mathbf{w} \quad \text{y} \quad \mathbf{z}=z_1\mathbf{u}+z_2\mathbf{v}+z_3\mathbf{w},$$

demuéstrese que

$$[\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} [\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}].$$

3. Simplifíquese

$$[3\mathbf{u}+2\mathbf{v},\ \mathbf{u}-5\mathbf{w},\ 3\mathbf{v}+\mathbf{w}].$$

4. Hállese el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son

$$\mathbf{u}=3\mathbf{u}_1-2\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3, \quad \mathbf{v}=\mathbf{u}_1-2\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3, \quad \mathbf{w}=6\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2.$$

17.4. Doble producto vectorial.

El producto vectorial no es asociativo, es decir, no se verifica en general que

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{z}=\mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{z}).$$

En efecto,

$$(\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_1)\times\mathbf{u}_2=\mathbf{0}\times\mathbf{u}_2=\mathbf{0}\quad\text{y}\quad\mathbf{u}_1\times(\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2)=\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_3=-\mathbf{u}_2\neq\mathbf{0}.$$

Entonces, si queremos poder hablar de *un* producto vectorial de tres vectores, tendremos que elegir uno de los dos posibles.

Se llama *doble producto vectorial* de los vectores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ al vector

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{z}.$$

PROPIEDADES.

1.

$$\begin{aligned}[(\mathbf{v}+\mathbf{v}')\times(\mathbf{w}+\mathbf{w}')]\times(\mathbf{z}+\mathbf{z}')=\\ =(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{z}+(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{z}'+(\mathbf{v}\times\mathbf{w}')\times\mathbf{z}+\\ +(\mathbf{v}\times\mathbf{w}')\times\mathbf{z}'+(\mathbf{v}'\times\mathbf{w})\times\mathbf{z}+(\mathbf{v}'\times\mathbf{w})\times\mathbf{z}'+(\mathbf{v}'\times\mathbf{w}')\times\mathbf{z}'.\end{aligned}$$

Es consecuencia de la propiedad 3 de [17.2].

2. $$(\lambda\mathbf{v}\times\mu\mathbf{w})\times\nu\mathbf{z}=(\lambda\mu\nu)(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{z}.$$

Es consecuencia de la propiedad 2 de [17.2].

3. $$(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{z}=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{z})\mathbf{w}-(\mathbf{w}\cdot\mathbf{z})\mathbf{v}.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{z}=[(v_3w_1-v_1w_3)z_3-(v_1w_2-v_2w_1)z_2]\mathbf{u}_1+\\ +[(v_1w_2-v_2w_1)z_1-(v_2w_3-v_3w_2)z_3]\mathbf{u}_2+\\ +[(v_2w_3-v_3w_2)z_2-(v_3w_1-v_1w_3)z_1]\mathbf{u}_3\\ (\mathbf{v}\cdot\mathbf{z})\mathbf{w}-(\mathbf{w}\cdot\mathbf{z})\mathbf{v}=[(v_1z_1+v_2z_2+v_3z_3)w_1-(w_1z_1+w_2z_2+w_3z_3)v_1]\mathbf{u}_1+\\ +[(v_1z_1+v_2z_2+v_3z_3)w_2-(w_1z_1+w_2z_2+w_3z_3)v_2]\mathbf{u}_2+\\ +[(v_1z_1+v_2z_2+v_3z_3)w_3-(w_1z_1+w_2z_2+w_3z_3)v_3]\mathbf{u}_3\end{aligned}$$

La igualdad de los segundos miembros implica la de los primeros.

En virtud de las propiedades 1 y 2 el doble producto vectorial es una aplicación trilineal.

EJEMPLO 1. Sean

$$\mathbf{v}=3\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3,\quad \mathbf{w}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{z}=2\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2+3\mathbf{u}_3.$$

Entonces

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-3\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2-5\mathbf{u}_3$$

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{z}=\begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3.$$

Pero también se podría haber procedido así

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{z}=3\cdot 2+2(-1)+(-1)3=1$$
$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{z}=1\cdot 2+(-1)(-1)+(-1)3=0$$
$$(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times\mathbf{z}=1\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3.$$

Se llama *identidad de Lagrange* a la igualdad

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{z})=\begin{vmatrix} \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{z} \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{z} \end{vmatrix}$$

Demostración:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{z})=[\mathbf{u}\times\mathbf{v},\ \mathbf{w},\ \mathbf{z}]=-[\mathbf{w},\ \mathbf{u}\times\mathbf{v},\ \mathbf{z}]=$$
$$=-\mathbf{w}\cdot\{(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{z}\}=-\mathbf{w}\cdot[(\mathbf{u}\cdot\mathbf{z})\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{z})\mathbf{u}]=$$
$$=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{z})-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{z})=\begin{vmatrix} \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{z} \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{z} \end{vmatrix}.$$

EJEMPLO 2. Si

$$\mathbf{u}=3\mathbf{u}_1-2\mathbf{u}_2+4\mathbf{u}_3,\quad \mathbf{v}=\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3,\quad \mathbf{w}=\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3$$
$$\text{y}\quad \mathbf{z}=\mathbf{u}_1+3\mathbf{u}_2+4\mathbf{u}_3$$

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{z})=\begin{vmatrix} 3\cdot 1+(-2)2+4(-1) & 3\cdot 1+(-2)3+4\cdot 4 \\ 0\cdot 1+1\cdot 2+(-1)(-1) & 0\cdot 1+1\cdot 3+(-1)4 \end{vmatrix}=$$
$$=\begin{vmatrix} -5 & 13 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-34.$$

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que $[\mathbf{u}\times\mathbf{v},\ \mathbf{v}\times\mathbf{w},\ \mathbf{w}\times\mathbf{u}]=[\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}]^2$.

2. Demuéstrese que $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$.

3. Demuéstrese que $(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=[\mathbf{v},\ \mathbf{x},\ \mathbf{y}]\mathbf{u}-[\mathbf{u},\ \mathbf{x},\ \mathbf{y}]\mathbf{v}$.

4. Dados los vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, hállese $[\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}]$ siendo

$$\mathbf{u}=(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\times\mathbf{z}$$
$$\mathbf{v}=(\mathbf{y}\times\mathbf{z})\times\mathbf{x}$$
$$\mathbf{w}=(\mathbf{z}\times\mathbf{x})\times\mathbf{y}.$$

5. Demuéstrese que la condición necesaria y suficiente para que

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$$

es que

$$(\mathbf{w}\times\mathbf{u})\times\mathbf{v}=\mathbf{0}.$$

6. Resolver el sistema

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{x})\times\mathbf{w}=\mathbf{u}$$
$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}=c.$$

7. Si

$$\mathbf{v}=5\mathbf{u}_1-2\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3,\quad \mathbf{w}=3\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2,\quad \mathbf{u}=6\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_3\quad \text{y}\quad \mathbf{z}=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3,$$

calcúlense

a) $(\mathbf{v}+\mathbf{w})\times\mathbf{z}$,
b) $[\mathbf{u}+\mathbf{v},\ \mathbf{w},\ \mathbf{z}]$,
c) $(3\mathbf{v}-2\mathbf{w})\times(\mathbf{v}+4\mathbf{w})$,
d) $|(\mathbf{v}\times\mathbf{z})\times\mathbf{w}|$,
e) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{z})$ y
f) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{w}\times\mathbf{z})$.

8. Si

$$\mathbf{u}=3\mathbf{u}_1+2\mathbf{u}_2-5\mathbf{u}_3\quad \text{y}\quad \mathbf{v}=2\mathbf{u}_1-6\mathbf{u}_2+4\mathbf{u}_3,$$

hállese un vector unitario perpendicular a ambos.

9. Demuéstrese la llamada *identidad de Jacobi*

$$\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})+\mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})+\mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u})=\mathbf{0}.$$

17.5. El espacio euclídeo tridimensional.

Se llama *espacio euclídeo* al espacio afín E_3 asociado al espacio vectorial euclídeo V_3.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

Si P y Q son dos puntos de E_3 cuyos vectores de posición respecto a un origen O son $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ respectivamente y llamamos $d(P, Q)$ a la distancia entre ambos, tenemos

$$d(P, Q) = |\{\overrightarrow{PQ}\}| = |\mathbf{q} - \mathbf{p}| = \sqrt{(\mathbf{q} - \mathbf{p})^2} \tag{75}$$

Si las coordenadas de P y Q respecto al sistema de referencia métrico $\{O;\ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ son (p_1, p_2, p_3) y (q_1, q_2, q_3) entonces

$$d(P, Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2} \tag{76}$$

Al igual que en el caso del plano euclídeo se demuestra que d es una función de distancia y que el espacio euclídeo tridimensional, con esta función de distancia, es un espacio métrico.

EJEMPLO 1. El conjunto de los puntos del espacio de coordenadas (x_1, x_2, x_3) cuya distancia a un punto fijo $C(c_1, c_2, c_3)$ es una constante positiva R, es la superficie esférica de ecuación

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3) = R^2.$$

EJEMPLO 2. El conjunto de los puntos del espacio, de coordenadas (x_1, x_2, x_3) que equidistan de dos puntos fijos $P(p_1, p_2, p_3)$ y $Q(q_1, q_2, q_3)$ es el plano de ecuación:

$$2(q_1 - p_1)x_1 + 2(q_2 - p_2)x_2 + 2(q_3 - p_3)x_3 + \\ + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - q_1^2 - q_2^2 - p_3^2 = 0.$$

ECUACIÓN NORMAL DEL PLANO.

Sea el plano π de ecuación general

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0, \tag{77}$$

respecto a un sistema de referencia métrico. Si $P \in \pi$, se verifica

$$ap_1 + bp_2 + cp_3 + d = 0$$

y restando miembro a miembro las dos ecuaciones, obtenemos

$$a(x_1 - p_1) + b(x_2 - p_2) + c(x_3 - p_3) = 0 \tag{78}$$

pero, puesto que los puntos $X(x_1, x_2, x_3)$ y $P(p_1, p_2, p_3)$ pertenecen al plano, $(x_1 - p_1,\ x_2 - p_2,\ x_3 - p_3)$ son las coordenadas de un vector

perteneciente a la variedad de dirección L del plano y (78) nos dice que el vector de coordenadas (a, b, c) pertenece a la variedad ortogonal a L que, como hemos visto en el Ej. 5 de [17-1], es una recta vectorial. A cualquier vector no nulo de esta variedad ortogonal le llamaremos *vector característico* del plano. Si dividimos (77) por $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ obtenemos como nueva ecuación del plano

$$(79)\qquad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}x_1+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}x_2+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}x_3+ \\ +\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=0$$

a la que se llama *ecuación normal* del plano. La interpretación geométrica de los coeficientes

$$(80)\qquad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

es la de coordenadas de un vector unitario perpendicular al plano. Si llamamos α, β y γ a los ángulos que forman, respectivamente, los vectores básicos $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ con este vector, es fácil comprobar que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\cos\alpha,\qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\cos\beta, \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\cos\gamma,$$

razón por la que se suele llamar a estos números *cosenos directores* del plano.

EJEMPLO 3. Los cosenos directores del plano de ecuación

$$3x_1-2x_2+x_3-7=0$$

son

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{14}},\qquad \cos\beta=\frac{-2}{\sqrt{14}},\qquad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

y su ecuación normal es

$$\frac{3}{\sqrt{14}}x_1-\frac{2}{\sqrt{14}}x_2+\frac{1}{\sqrt{14}}x_3-\frac{7}{\sqrt{14}}=0.$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO.

Si llamamos $d(P, \pi)$ a la distancia del punto $P(p_1, p_2, p_3)$ al plano π de ecuación (77), tendremos

$$d(P, \pi) = d(P, P') = \mathrm{pr}_{PP'} \overline{QP} = \{\overrightarrow{QP}\} \cdot \mathbf{u}$$

donde P' es el pie de la perpendicular trazada por P a π, Q es un punto cualquiera de π, $\mathrm{pr}_{PP'} \overline{QP}$ es la proyección ortogonal del segmento QP sobre la recta determinada por P y P' y $\mathbf{u}$ es un vector unitario perpendicular al plano. Entonces, recordando la significación geométrica de los números (80),

$$(81) \qquad d(P, \pi) = (p_1 - q_1) \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + (p_2 - q_2) \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} +$$

$$+ (p_3 - q_3) \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} p_1 +$$

$$+ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} p_2 + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} p_3 + \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

puesto que, por pertenecer Q a π, se verifica

$$-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} q_1 - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} q_2 - \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} q_3 =$$

$$= \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

La fórmula (81) nos dice que para calcular la distancia de un punto a un plano, basta con sustituir las variables x_1, x_2, x_3 en la ecuación normal del plano por las coordenadas del punto y efectuar las operaciones indicadas.

La distancia del origen O del sistema de referencia al plano π será, por tanto,

$$d(O, \pi) = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

lo que nos da la interpretación geométrica del término independiente de la ecuación normal del plano, luego

$$(82) \qquad \cos\alpha \cdot x_1 + \cos\beta \cdot x_2 + \cos\gamma \cdot x_3 + d(O, \pi) = 0$$

es la ecuación normal del plano.

En la fórmula (81), el segundo miembro puede ser positivo o negativo, ahora bien, la distancia viene siempre medida por un número no negativo, luego habrá que tomar el valor absoluto del resultado. La significación geométrica de este signo es la siguiente: a puntos situados en el mismo semiespacio respecto a π corresponden en (81) signos iguales y a dos puntos en semiespacios distintos, signos opuestos.

EJEMPLO 4. La distancia del punto P (2, 5, -3) al plano del ejemplo 3 es

$$d(P,\pi)=\frac{3\cdot 2-2\cdot 5-1\cdot 3-7}{\sqrt{14}}=\frac{-14}{\sqrt{14}}$$

y dicho punto está en el mismo espacio, de los dos determinados por π, que el origen, pues

$$d(O,\pi)=\frac{-7}{\sqrt{14}}<0 \quad \text{y} \quad d(P,\pi)<0.$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

Sea la recta r de ecuaciones

$$\frac{x_1-a_1}{v_1}=\frac{x_2-a_2}{v_2}=\frac{x_3-a_3}{v_3}$$

respecto a un sistema de referencia métrico y el punto P de coordenadas (p_1, p_2, p_3). Si llamamos $d(P,r)$ a la distancia del punto a la recta, tenemos

$$d(P,r)=d(P,P')=|\{\overrightarrow{PP'}\}|$$

donde P' es la proyección ortogonal de P sobre r.

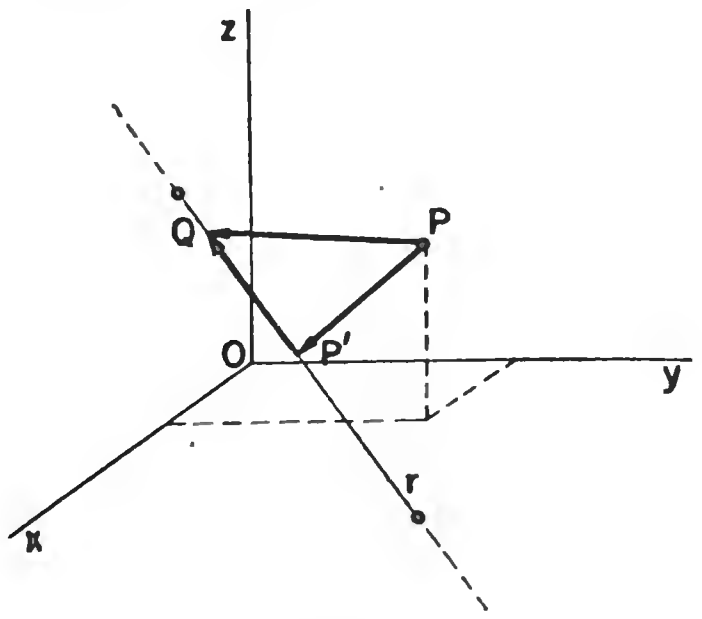


FIG. 7.

Ahora bien,

$$\{\overrightarrow{PQ}\} = \{\overrightarrow{PP'}\} + \{\overrightarrow{P'Q}\} = \{\overrightarrow{PP'}\} + \lambda \mathbf{v}$$

donde hemos llamado $\mathbf{v}$ al vector de dirección r, de coordenadas (v_1, v_2, v_3) y Q es un punto cualquiera de r, por ejemplo, el de coordenadas (a_1, a_2, a_3). Si multiplicamos escalarmente ambos miembros de la igualdad vectorial anterior por $\mathbf{v}$, obtenemos

$$\{\overrightarrow{PQ}\} \cdot \mathbf{v} = \lambda |\mathbf{v}|^2 \tag{83}$$

puesto que $\{\overrightarrow{PP'}\} \cdot \mathbf{v} = 0$ por ser ambos vectores perpendiculares.

De (83)

$$\lambda = \frac{\{\overrightarrow{PQ}\} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}$$

luego

$$\{\overrightarrow{PP'}\} = \{\overrightarrow{PQ}\} - \frac{\{\overrightarrow{PQ}\} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v}$$

de donde

$$d(P, r) = |\{\overrightarrow{PP'}\}| = \left| \{\overrightarrow{PQ}\} - \frac{\{\overrightarrow{PQ}\} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \right| \tag{84}$$

o bien, recordando que el área del rectángulo de base $\overline{QP}$ y altura $\overline{PP'}$ es

$$A = |\{\overrightarrow{PQ}\} \times \{\overrightarrow{QP'}\}| = \left| \{\overrightarrow{PQ}\} \times \frac{\{\overrightarrow{PQ}\} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \right|$$

tenemos

$$d(P, r) = \frac{A}{|\{\overrightarrow{QP'}\}|} = \frac{|\{\overrightarrow{PQ}\} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} =$$

(85)

$$= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 - p_2 & a_3 - p_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 - p_3 & a_1 - p_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 - p_1 & a_2 - p_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

EJEMPLO 5. La distancia del punto $P(1, 2, -1)$ a la recta

$$r \equiv \frac{x_1-2}{2} = \frac{x_2-4}{3} = \frac{x_3-1}{-1}$$

es

$$d(P,r) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 4-2 & 1+1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1+1 & 2-1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2-1 & 4-2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{14}}$$

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN.

Sean las rectas

$$r \equiv \frac{x_1-a_1}{v_1} = \frac{x_2-a_2}{v_2} = \frac{x_3-a_3}{v_3}$$

$$s \equiv \frac{x_1-b_1}{w_1} = \frac{x_2-b_2}{w_2} = \frac{x_3-b_3}{w_3}$$

Sabemos por (34) que si las dos rectas se cruzan

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

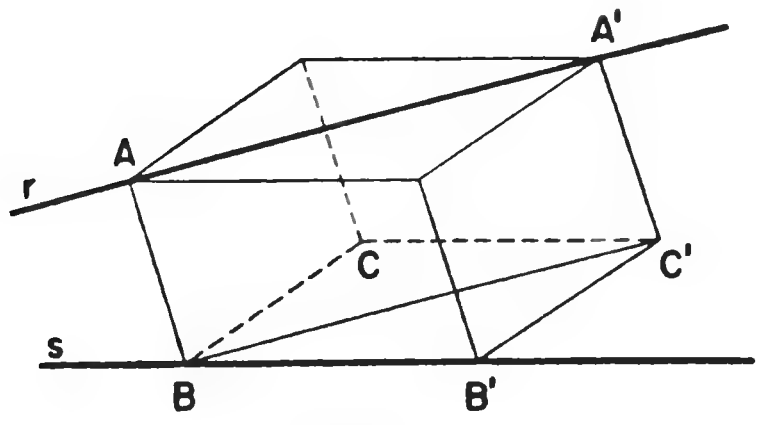


FIG. 8.

Sean A y B los puntos de coordenadas (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) y A' y B' otros dos puntos de r y s, respectivamente, tales que

$$\{\overrightarrow{AA'}\} = \mathbf{v} \quad \text{y} \quad \{\overrightarrow{BB'}\} = \mathbf{w}.$$

Consideremos el paralelepípedo de aristas AA', BB' y AB. La distancia entre las rectas r y s es la altura de dicho paralelepípedo re-

lativa a la cara $BB'C'C$, pero, de acuerdo con [17.3], el volumen de dicho paralelepípedo es

$$V=|[\{\overrightarrow{AB}\},\ \{\overrightarrow{AA'}\},\ \{\overrightarrow{BB'}\}]|=|[\{\overrightarrow{AB}\},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}]|$$

y el área de la base citada es, según se vio en [17.2]

$$A=|\{\overrightarrow{BB'}\}\times\{\overrightarrow{BC'}\}|=|\{\overrightarrow{BB'}\}\times\{\overrightarrow{AA'}\}|=|\mathbf{w}\times\mathbf{v}|$$

luego

$$d(r,s)=\frac{|[\{\overrightarrow{AB}\},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}]|}{|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|}=\frac{\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}^2}} \tag{86}$$

en donde hay que tomar el valor absoluto del último miembro.

EJEMPLO 6. La distancia entre las rectas

$$r\equiv\frac{x_1-2}{3}=\frac{x_2-1}{2}=\frac{x_3}{4}$$

$$s\equiv\frac{x_1+4}{2}=\frac{x_2}{-1}=\frac{x_3-4}{3}$$

es

$$d(r,s)=\frac{\begin{vmatrix} 2+4 & 1-0 & 0-4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}^2}}=\frac{87}{\sqrt{150}}$$

AREA DE UN TRIÁNGULO.

El área del triángulo de vértices $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $B(b_1,\ b_2,\ b_3)$ y $C(c_1,\ c_2,\ c_3)$ sería

$$\text{área}=\frac{1}{2}\,|\{\overrightarrow{AB}\}\times\{\overrightarrow{AC}\}|= \tag{87}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} b_3-a_3 & b_1-a_1 \\ c_3-a_3 & c_1-a_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 \end{vmatrix}^2}$$

donde ha de tomarse el resultado positivo de la raíz.

EJEMPLO 7. El área del triángulo $A(0, 2, -1)$, $B(2, 4, 1)$ y $C(1, 3, 2)$ es

$$\text{área} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 4-2 & 1+1 \\ 3-2 & 2+1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1+1 & 2-0 \\ 2+1 & 1-0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2-0 & 4-2 \\ 1-0 & 3-2 \end{vmatrix}^2} = 2\sqrt{2}$$

VOLUMEN DE UN TETRAEDRO.

El volumen del tetraedro de vértices $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ y $D(d_1, d_2, d_3)$ es

$$\text{vol} = \frac{1}{3}\,\text{área}_{ABC} \times h$$

donde $h = d(D, \pi)$, siendo π el plano determinado por los puntos A, B y C, cuya ecuación normal es

$$\frac{\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2-a_2 & x_3-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_3-a_3 & b_1-a_1 \\ c_3-a_3 & c_1-a_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 \end{vmatrix}^2}} = 0$$

luego

$$\text{vol} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}$$

Como siempre, el signo del segundo miembro indicará el sentido de recorrido de los vértices.

EJEMPLO 8. El volumen del tetraedro de vértices $A(1, 1, 2)$, $B(2, 4, 3)$, $C(2, 5, -6)$, $D(3, 3, 6)$ es

$$\text{vol} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2-1 & 4-1 & 3-2 \\ 2-1 & 5-1 & -6-2 \\ 3-1 & 3-1 & 6-2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

luego el volumen del tetraedro es $\frac{1}{3}$.

ANGULO DE DOS RECTAS.

Sean las rectas

$$r \equiv \frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \frac{x_3 - a_3}{v_3}$$

$$s \equiv \frac{x_1 - b_1}{w_1} = \frac{x_2 - b_2}{w_2} = \frac{x_3 - b_3}{w_3}$$

tenemos

$$\cos \widehat{r, s} = |\cos \widehat{\mathbf{v}, \mathbf{w}}| = \frac{|v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}} \tag{89}$$

La condición de perpendicularidad es, pues,

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0. \tag{90}$$

EJEMPLO 9. El ángulo de las rectas

$$r \equiv \frac{x_1 - 3}{2} = \frac{x_2 + 4}{5} = \frac{x_3 + 2}{6}$$

$$s \equiv \frac{x_1 + 4}{-1} = x_2 = \frac{x_3 - 1}{4}$$

es

$$\cos \widehat{r, s} = \frac{|2(-1) + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 4|}{\sqrt{2^2 + 5^2 + 6^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{9}{\sqrt{130}}.$$

ANGULO DE PLANO Y RECTA.

Dado el plano

$$\pi \equiv ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

y la recta

$$r \equiv \frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \frac{x_3 - a_3}{v_3}$$

sabemos por geometría elemental que el ángulo que la recta forma con el plano es el ángulo formado por dicha recta con su proyección ortogonal sobre el plano, el cual es complementario del ángulo formado por la recta y una perpendicular al plano, entonces

$$\operatorname{sen} (\widehat{r, \pi}) = \cos (\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{a}}) = \frac{a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \tag{91}$$

donde hemos llamado **a** al vector característico del plano, de coordenadas (a_1, a_2, a_3).

La condición de perpendicularidad entre recta y plano es

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{v},$$

es decir,

$$\frac{a_1}{v_1} = \frac{a_2}{v_2} = \frac{a_3}{v_3} \tag{92}$$

y la de paralelismo,

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0, \tag{93}$$

como ya sabíamos.

EJEMPLO 10. El ángulo que forman la recta

$$r \equiv \frac{x_1 - 2}{4} = \frac{x_2 + 7}{3} = \frac{x_3 - 5}{-2}$$

y el plano

$$\pi \equiv 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 7 = 0$$

es

$$\alpha = \operatorname{arc\,sen} \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 3(-2)}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 3^2}\sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{18}{\sqrt{34}\sqrt{29}}$$

EJEMPLO 11. La recta perpendicular al plano

$$\pi \equiv 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 7 = 0$$

por el punto (2, 2, 1) es

$$\frac{x_1 - 2}{2} = \frac{x_2 - 2}{-3} = \frac{x_3 - 1}{4}$$

EJEMPLO 12. Dado el plano $\pi \equiv x_1 - x_2 + 4x_3 - 2 = 0$ y el punto P (3, 1, 4), existe una simple infinidad de rectas que pasan por P y son paralelas a π: todas las del haz de vértice P y situadas en el plano paralelo a π por P. Sus ecuaciones vienen dadas por

$$\frac{x_1 - 3}{v_1} = \frac{x_2 - 1}{v_2} = \frac{x_3 - 4}{v_3}$$

con

$$v_1 - v_2 + 4v_3 = 0.$$

ANGULO DE DOS PLANOS.

El ángulo que forman los planos

$$\pi_1 \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 = 0$$
$$\pi_2 \equiv a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 + a_4' = 0$$

es igual o suplementario al que forman sus vectores característicos, luego

$$(94) \qquad \cos \widehat{\pi_1, \pi_2} = |\cos \widehat{a, a'}| = \frac{|a_1 a_1' + a_2 a_2' + a_3 a_3'|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2}}.$$

La condición de perpendicularidad entre dos planos es, por tanto,

$$(95) \qquad a_1 a_1' + a_2 a_2' + a_3 a_3' = 0.$$

EJEMPLO 13. El ángulo que forman los planos

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 1 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$$

es

$$\alpha = \text{arc cos} \frac{|3 \cdot 1 + (-2)3 + 4(-1)|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2}\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{29}\sqrt{11}}$$

EJEMPLO 14. Dados el punto $P(3, 2, 0)$ y el plano $\pi \equiv 4x_1 - x_2 + 5x_3 - 6 = 0$, existe una simple infinidad de planos perpendiculares a π por P: todos los del haz de arista la recta perpendicular a π por P, sus ecuaciones son

$$a_1(x_1 - 3) + a_2(x_2 - 2) + a_3 x_3 = 0$$

con

$$4a_1 - a_2 + 5a_3 = 0.$$

EJEMPLO 15. El plano perpendicular al de ecuación

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 6 = 0$$

por la recta

$$r \equiv \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6 = 0 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

se obtiene de la ecuación del haz de planos de arista r

$$\lambda(x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6) + \mu(x_1 + 4x_3) = 0$$

con la condición

$$(\lambda+\mu)+(-3)(-2)\lambda+2(3\lambda+4\mu)=0,$$

de donde

$$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{-9}{13},$$

luego

$$4x_1+18x_2+25x_3-54=0$$

es la ecuación del plano pedido.

EJERCICIOS

1. Dada la recta r de ecuaciones

$$\frac{x_1-2}{3}=\frac{x_2+4}{-1}=\frac{x_3-1}{5}$$

hállense sus planos proyectantes, es decir, los planos que la contienen y son paralelos a uno de los ejes de coordenadas.

2. Dada la recta de ecuaciones

$$r\equiv\begin{cases}3x_1-2x_2+3x_3-5=0\\ x_1+4x_2-6x_3+1=0\end{cases}$$

1.º, exprésese como intersección de dos de sus planos proyectantes, ¿de cuántas formas puede hacerse esto?; 2.º, hállese un vector de dirección de dicha recta, y 3.º, hállense los ángulos que forma con los ejes.

3. Dados los puntos $A(3, 2, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(2, -2, 3)$ y $D(-1, 1, -2)$ hállese

a) el área del triángulo ABC,

b) la distancia de A a la recta BC,

c) el volumen del tetraedro $ABCD$,

d) la distancia de B al plano ACD,

e) la distancia entre las rectas AB y CD.

4. Hállese la ecuación vectorial del plano que pasa por el punto P y tiene por vector característico el vector libre $\mathbf{v}$.

5. Hállese la ecuación vectorial de la superficie esférica de centro el punto C y radio r.

6. Los cosenos directores de un plano son números proporcionales a 5, 3 y -1, respectivamente. Hállense dichos cosenos directores y encuén-

trese la ecuación del plano, sabiendo que su distancia al origen es igual a la distancia entre los puntos $P(1, 1, 1)$ y $Q(2, 0, 3)$.

7. Hállese la distancia del punto P, en que la recta

$$\frac{x_1-2}{2}=\frac{x_2-4}{3}=\frac{x_3-4}{-1}$$

corta al plano $2x_1+x_2-x_3+4=0$, al plano determinado por los puntos $Q(2, 0, 1)$, $R(0, 0, 1)$, $S(2, 2, 0)$.

8. Hállese la ecuación del plano que corta a los ejes en los puntos $(2, 0, 0)$, $(0, -3, 0)$ y $(0, 0, 5)$.

9. Compruébese si las rectas r_1 y r_2 se cruzan, siendo r_1 paralela a los planos $2x_1-x_2=0$ y $x_1+x_2+x_3=0$ por el punto $P(2, 1, -1)$ y r_2 perpendicular al plano determinado por los puntos $A(3, 0, 1)$, $B(0, 2, 1)$ y $C(1, 1, 0)$ y pasa por el origen de coordenadas.

10. Hállese una recta perpendicular a las rectas

$$r\equiv\frac{x_1-2}{2}=\frac{x_2}{3}=x_3$$

y

$$s\equiv\begin{cases}x_1+x_2-\ x_3=0\\ x_1\ \ \ -2x_3=0\end{cases}$$

por el punto $(2, -1, 2)$.

11. Hállese la perpendicular común a las rectas

$$r\equiv\frac{x_1}{2}=\frac{x_2+4}{-1}=\frac{x_3-1}{3}$$

$$s\equiv\frac{x_1-1}{4}=\frac{x_2-1}{5}=\frac{x_3}{2}$$

es decir, la recta que apoyándose en r y s es perpendicular a ambas.

12. Ecuación del plano incidente con el punto $(-3, 1, 0)$ y perpendicular a los planos $x_3=0$ y $x_1+x_2-x_3-1=0$. Hállense los ángulos que forma con los ejes coordenados.

13. Determínese sobre la recta

$$r\equiv\frac{x_1}{2}=\frac{x_2+1}{3}=\frac{x_3-2}{-1}$$

las coordenadas de un punto que equidiste de los planos

$$3x_1+2x_2-x_3+1=0 \quad \text{y} \quad x_1+4x_2-1=0.$$

14. Hállese el ángulo que forman el plano $x_1-2x_2+3x_3-1=0$ y el que pasa por la recta

$$r\equiv\begin{cases}x_1=2x_3+1\\ x_2=\ x_3-1\end{cases}$$

y dista 4 unidades del origen de coordenadas.

15. Hállese el coseno del ángulo formado por la recta

$$r\equiv\frac{x_1}{2}=\frac{2x_2-6}{4}=\frac{x_3}{-1}$$

y el plano que pasa por el punto P (1, 0, 1) y es perpendicular a la recta

$$s\equiv\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0\\ 2x_1\quad -x_3=0.\end{cases}$$

16. Hállese la distancia del punto P (2, 1, -1) al plano que pasa por el eje OX y forma ángulo de 60° con el plano $x_2=0$.

17. Hállense las ecuaciones de la recta que se apoya en las

$$r\equiv\begin{cases}x_1\quad +x_3-1=0\\ \quad x_2\quad\ =0\end{cases}\qquad\text{y}\qquad s\equiv\begin{cases}x_1=0\\ x_3=0\end{cases}$$

y es paralela a los planos

$$\pi\equiv x_1+2x_2-x_3=0\qquad\text{y}\qquad\sigma\equiv 2x_1+x_2+3x_3=0.$$

17.6. Cambio de sistema de referencia en el espacio euclídeo.

En el espacio euclídeo los escalares a_{ij} (i, $j=1$, 2, 3), elementos de la matriz A del cambio de sistema de referencia de ecuación matricial (12′) tienen la siguiente significación:

$$a_{ij}=\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{u}_j=\cos\widehat{\mathbf{v}_i,\mathbf{u}_j}.$$

Si los sistemas de referencia original y final son métricos, los 9 ángulos $\widehat{\mathbf{v}_i,\mathbf{u}_j}$ (i, $j=1$, 2, 3) no son independientes, ya que entonces existen las siguientes 6 relaciones:

$$\begin{matrix}\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_j=0\\ \mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_j=0\end{matrix}\qquad i,\ j=1,\ 2,\ 3,\qquad i<j,$$

luego no hay más que tres ángulos independientes.

A continuación vamos a describir un procedimiento en el que la nueva base queda definida por tres ángulos, llamados *ángulos de*

Euler, que serán los tres parámetros de la matriz del cambio. Supondremos el origen fijo.

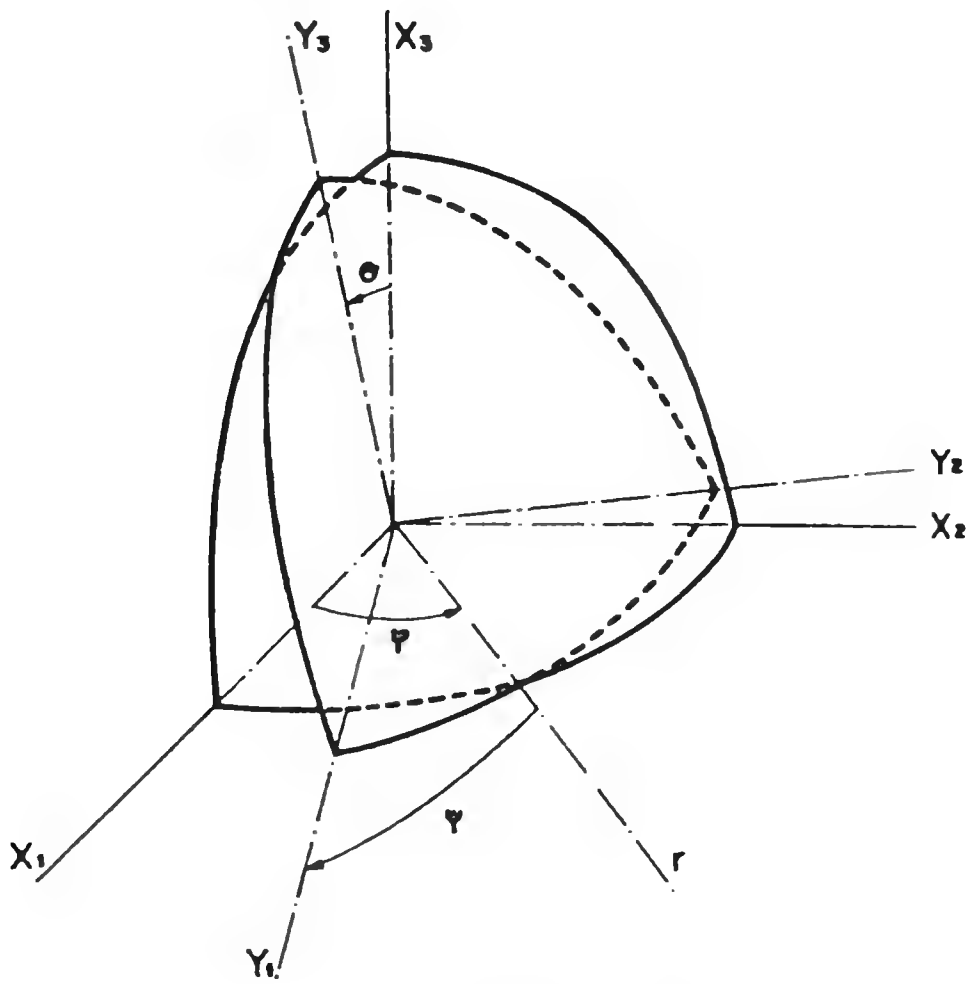


FIG. 9.

Sea $\mathbf{u}$ un vector unitario en la dirección de $r = x_1Ox_2 \cap y_1Oy_2$. Los ángulos de Euler serán

$$\varphi = \widehat{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}}, \quad \theta = \widehat{\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_3} \quad \text{y} \quad \psi = \widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}_1}.$$

El paso de los ejes Ox_1, Ox_2, Ox_3 a los Oy_1, Oy_2, Oy_3 puede hacerse en tres etapas sucesivas:

1.ª Un giro de eje Ox_3 y amplitud φ,

$$\{O;\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3\} \xrightarrow{\varphi} \{O;\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}_2',\ \mathbf{u}_3\}$$

siendo

$$\mathbf{u}_2' \perp \mathbf{u} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2' \perp \mathbf{u}_3.$$

2.ª Un giro de eje Or y amplitud θ,

$$\{O;\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}_2',\ \mathbf{u}_3\} \xrightarrow{\theta} \{O;\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}_2'',\ \mathbf{v}_3\}$$

siendo

$$\mathbf{u}_2' \perp \mathbf{u} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2'' \perp \mathbf{v}_3.$$

3.ª Un giro de eje Oy_3 y amplitud ψ,

$$\{O;\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}_2'',\ \mathbf{v}_3\} \xrightarrow{\psi} \{O;\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\}$$

y $\mathbf{v}_1$ será perpendicular a $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_1$.

La ecuación matricial del primer cambio será

$$X = X^* \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = X^* G_1,$$

la del segundo,

$$X^* = X^{**} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = X^{**} G_2$$

y la del tercero

$$X^{**} = Y \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Y G_3$$

luego

$$X = X^* G_1 = X^{**} G_2 G_1 = Y G_3 G_2 G_1$$

será la ecuación matricial del cambio total. Las matrices G_1, G_2 y G_3 son ortogonales y su producto también lo es.

EJERCICIOS

Hállese la matriz del cambio de sistema de referencia, siendo los ángulos de Euler $\varphi = 30°$, $\theta = 45°$ y $\psi = 60°$ y las coordenadas del nuevo origen $(3,\ 2,\ -1)$.

Los Palomos
BAR
CERVE
JAR'23

18

formas cuadráticas

18.1. Formas bilineales y cuadráticas.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre el cuerpo de los números reales R y f una forma bilineal.

$$f\colon\ V \times V \longrightarrow R.$$

Si $\{u_1 \ \ldots \ u_n\}$ es una base de V y $x=\sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ e $y=\sum_{i=1}^{n} y_i u_i$, tenemos que

$$f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i,\ \sum_{i=1}^{n} y_i u_i\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j f(u_i, u_j), \tag{96}$$

donde hemos hecho uso de las propiedades 1 y 2 de [10.1].

La expresión (96) nos dice que f está perfectamente determinada una vez que se conocen los n^2 valores $f(u_i, u_j)$ $i, j=1, 2, \ldots, n$. Obsérvese que el último miembro de (96) es un polinomio con coeficientes reales que es lineal respecto a cada una de las variables x_i, y_i. Puede escribirse en forma matricial de la manera siguiente:

$$f(x, y) = XBY' \tag{97}$$

donde hemos llamado X a la matriz $(x_1, \ldots, x_n)$, Y a la $(y_1, \ldots, y_n)$ y B a la

$$\begin{pmatrix} f(u_1, u_1) & \ldots & f(u_1, u_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ f(u_n, u_1) & \ldots & f(u_n, u_n) \end{pmatrix}.$$

De ahora en adelante llamaremos u_{ij} a $f(u_i, u_j)$, con lo que $B=(u_{ij})$. En virtud de lo que hemos dicho más arriba, la forma bilineal está caracterizada, respecto a la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ por la matriz B.

Si ahora efectuamos un cambio de base, pasando de la base $\{u_i\}_{1\leq i\leq n}$ a la base $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ tal que $v_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j$, la expresión matricial de este cambio es, como sabemos,

$$X=X^*A, \quad A=(a_{ij}), \quad |A|\neq 0.$$

Sustituyendo en (97) las matrices X e Y por sus expresiones en función de X^* e Y^* dadas por la igualdad anterior, obtendremos

$$f(x,y)=X^*ABA'Y^{*\prime}=X^*B^*Y^{*\prime},$$

donde hemos hecho

$$ABA'=B^*. \tag{98}$$

La matriz de la forma bilineal f respecto a la nueva base $\{v_i\}_{1\leq i\leq n}$ es, por tanto, B^*.

En virtud de (98) y del resultado enunciado en [12.1], las matrices de una misma forma bilineal respecto a todas las bases de V posibles, tienen el mismo rango. A este rango común se le llama *rango* de la forma bilineal. Si el rango de una forma bilineal es menor que la dimensión del espacio V, se dice que es *degenerada* y *no degenerada* en caso contrario.

A dos matrices cuadradas B y B^* tales que existe una matriz regular A que verifica

$$B^*=ABA'$$

se les llama *congruentes*. Luego *si dos matrices caracterizan a la misma forma bilineal respecto a bases distintas, son congruentes.*

La congruencia de matrices es una relación de equivalencia, como puede comprobarse fácilmente. Entonces, todas las matrices de una misma clase de equivalencia caracterizan a la misma forma bilineal. Se plantea de manera natural el problema de hallar, entre las matrices de este conjunto, una que sea lo más sencilla posible, para que represente a la clase.

Vamos a estar interesados en formas bilineales simétricas, es decir en formas $f\colon V\times V\longrightarrow R$, tales que $f(x,y)=f(y,x)$ lo que implica que

$$XAY'=YAX' \tag{99}$$

pero, puesto que XAY' es una matriz de una fila y una columna, tenemos que

$$XAY'=(XAY')'=YA'X'$$

de donde, teniendo en cuenta (99), $A=A'$, es decir: *la matriz de una forma bilineal simétrica respecto a cualquier base es simétrica.*

Si dos vectores x e y de V son tales que $f(x, y)=0$ se dice que y es *conjugado* de x; ahora bien, por ser f simétrica, tenemos que $f(y, x)=0$, es decir, si y es conjugado de x, x es conjugado de y. Se dice entonces simplemente que x e y son *conjugados.*

Se llama *núcleo* de la forma bilineal al conjunto de los vectores de V que son conjugados de todos los vectores de V.

$$N(f)=\{x \in V \mid f(x, y)=0 \quad \forall \quad y \in V\}.$$

Una forma bilineal f: $V \times V \longrightarrow R$ permite definir una aplicación f_c de V en R de la siguiente forma

$$f_c(x)=f(x, x) \tag{100}$$

a esta aplicación f_c se le llama *forma cuadrática asociada* a la forma bilineal f. Su expresión matricial respecto a una cierta base de V es

$$f_c(x)=XBX'.$$

El valor de la forma bilineal en una pareja de vectores x e y de V puede expresarse en función de los valores de la forma cuadrática en estos vectores y en su suma. En efecto:

$$f_c(x+y)=f(x+y, x+y)=f_c(x)+2f(x, y)+f_c(y),$$

de donde

$$f(x, y)=\tfrac{1}{2}[f_c(x+y)-f_c(x)-f_c(y)]. \tag{101}$$

EJERCICIOS

1. Dada la forma bilineal simétrica f tal que $f(x, y)=2$, $f(x, x)=3$ y $f(y, y)=2$, hállese su expresión matricial, siendo $x=2u_1-u_2$, $y=u_1+3u_2$.

Vamos ahora a tratar de hallar una base en V tal que la matriz de la forma bilineal simétrica f respecto a esta base, o lo que es lo mismo, la matriz de la forma cuadrática asociada f_c, sea lo más sencilla posible. Las matrices más sencillas son, por lo que se refiere al cálculo con ellas (ejemplo 4 de [9.3]), las matrices diagonales. Vamos a ver que es posible hallar, en general de varias maneras, una base de V respecto a la cual la matriz f sea diagonal.

Nos vamos a limitar a demostrar el resultado enunciado más arriba para una clase particular de espacios vectoriales. Pero para ello necesitaremos una cierta preparación.

18.2. Espacios vectoriales euclídeos.

Con objeto de extender a los espacios vectoriales V de dimensión finita n sobre el cuerpo de los números reales R, los conceptos métricos estudiados en los dos capítulos anteriores (distancia, ángulo, perpendicular, etc.), vamos a definir una forma bilineal particular $f\colon V \times V \longrightarrow R$ de la siguiente manera: elegida una base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ definiremos

$$f(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

donde las δ_{ij} son las deltas de Kroenecker. La matriz de esta forma bilineal respecto a la base $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$ es la matriz de unidad I y la forma es evidentemente no degenerada: su rango es n. Llamaremos a esta forma bilineal, *producto escalar* y lo denotaremos por $x \cdot y$ en lugar de $f(x, y)$. Sus propiedades son:

Si $x, y, z \in V$ y $\lambda \in R$:

1. $x \cdot y = y \cdot x$.
2. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.
3. $\lambda x \cdot y = x \cdot \lambda y = \lambda (x \cdot y)$.
4. $x \cdot x \geqq 0$ y $x \cdot x = 0$ si y sólo si $x = 0$.

La comprobación de estas propiedades es inmediata.

Se llama *norma* del vector x y se representa por $\|x\|$ a $x \cdot x$. Puesto que es un número no negativo, existe su raíz cuadrada positiva, a la que se denomina *módulo* de x y simboliza por $|x|$.

De la misma forma que se hizo en [16.1], se demuestra la desigualdad de Cauchy Schwarz

$$|x \cdot y| \leqq |x|\,|y|,$$

de donde

$$\frac{|x \cdot y|}{|x|\,|y|} \leqq 1,$$

luego existe un ángulo α tal que $\cos \alpha = \dfrac{|x \cdot y|}{|x|\,|y|}$. A este ángulo se le llama *ángulo* de los vectores x e y.

Dos vectores x e y son ortogonales cuando

$$x \cdot y = 0. \tag{102}$$

Este producto escalar define una métrica sobre V, la cual variará, en general, al cambiar de base. Nos interesa encontrar todas las bases en las que la métrica inducida por este producto escalar sea la misma. Para ello observemos que los vectores u_i de la base original son ortonormales, es decir, $\|u_i\|=1$ y $u_i \cdot u_j=0$ si $i \neq j$. Entonces los vectores de la base $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$ buscada han de ser también ortonormales, si queremos que se conserve la métrica. Para ello será necesario que si

$$v_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j$$

se verifiquen las $\dfrac{n(n+1)}{2}$ condiciones

$$v_i \cdot v_j=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij} \tag{103}$$

pero si A es la matriz del cambio de base, esto equivale a decir que

$$AA'=I,$$

es decir, *la matriz de cambio de base es ortogonal.*

Y recíprocamente, si A es ortogonal, se tendría

$$X=X^*A,$$

luego

$$x \cdot y=XY'=X^*AA'Y^{*\prime}=X^*Y^*,$$

lo que nos indica que el producto escalar permanece invariante en este cambio de base y, por tanto, el módulo de los vectores y los ángulos y, por consiguiente, la métrica es la misma.

EJERCICIOS

1. Dada la variedad lineal L del espacio vectorial euclídeo V, demuéstrese que el conjunto de los vectores de V ortogonales a todos los de L es una variedad lineal. Se le llama variedad ortogonal de L.

2. Hállense las ecuaciones no paramétricas de la variedad ortogonal a la engendrada por el vector $v \in V$. ¿Cuál es su dimensión?

3. Demuéstrese que si L es la variedad lineal engendrada por v y L' su variedad ortogonal, L y L' son suplementarias.

18.3. Diagonalización de matrices.

Sea un endomorfismo φ: $V \longrightarrow V$ de un espacio vectorial de dimensión finita n sobre el cuerpo de los números reales R. Sabemos por [8.2] que la expresión matricial del endomorfismo respecto a una base $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de V es

$$Y = XT. \tag{104}$$

Si pasamos de la base $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n}$ a una nueva base $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$, siendo la expresión matricial del cambio de base

$$X = X^* A, \quad |A| \neq 0 \tag{105}$$

la expresión del homomorfismo respecto a la nueva base será

$$Y^* = X^* T^* \quad \text{con} \quad T^* = ATA^{-1}. \tag{106}$$

Nos proponemos estudiar en qué condiciones es posible encontrar una base de V en la que el endomorfismo φ venga caracterizado por una matriz diagonal D.

Supongamos el problema resuelto y que

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

es la matriz del endomorfismo φ respecto a la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Entonces los transformados mediante φ de los vectores de esta base serán

$$\varphi(v_i) = \alpha_i v_i.$$

A todo vector x de V que mediante el endomorfismo φ se transforma en otro proporcional a él, $\varphi(x) = \lambda x$, se le llama *vector propio* de dicho endomorfismo. Obsérvese que si es T la matriz del endomorfismo φ respecto a una cierta base de V y X la matriz de coordenadas de un vector propio de φ, se verifica

$$XT = \lambda X. \tag{107}$$

Al vector x se le llama también *vector propio* de la matriz T.

Se comprueba fácilmente que si x es un vector propio de φ, también lo es todo vector μx de la variedad lineal engendrada por x.

Vemos, pues, que nuestro problema inicial equivale al de hallar, en V, n vectores propios de φ que constituyan una base, es decir, que sean linealmente independientes.

Sea x uno de estos vectores, su matriz de coordenadas X respecto a la base $\{u_i\}_{1\leq i\leq n}$ tiene que verificar la relación (107), de donde

$$X(T-\lambda I)=0,$$

igualdad matricial que equivale a un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas: $x_1, \ldots, x_n$. Para que sea compatible (en el sentido de tener alguna solución distinta de la trivial) sabemos por [11.4] que el rango de la matriz $T-\lambda I$, cuyos elementos son los coeficientes de las incógnitas, ha de ser menor que n, lo que equivale a que

$$|T-\lambda I|=0, \tag{109}$$

que es la llamada *ecuación característica* del endomorfismo φ, o de la matriz T. Al polinomio de grado n en λ, que constituye el primer miembro de (109) se le llama *polinomio característico* y a sus raíces *valores propios*.

Entonces, si λ_1 es un valor propio real de (109), este valor llevado al sistema (108) lo hace compatible y sus soluciones son vectores propios.

LEMA 1.—*Un conjunto de vectores propios* $x_1, \ldots, x_h$, *correspondientes a valores propios reales,* $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$, *distintos, es un sistema libre.*

Demostración: Supongamos que $(x_1, \ldots, x_h)$ fuera un sistema ligado. Entonces al menos uno de ellos x_i se podría expresar en la forma

$$x_i=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j x_{i_j}$$

en función de una familia libre $\{x_{i_j}\}_{1\leq j\leq k}$ extraída del conjunto de los restantes. Al no ser $x_i=0$, no todos los coeficientes α_j pueden ser nulos. Aplicando φ a ambos miembros de la igualdad anterior obtendremos

$$\varphi(x_i)=\lambda_i x_i=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\lambda_{i_j}x_{i_j}$$

y si multiplicamos ambos miembros de dicha igualdad por λ_i, tenemos

$$\lambda_i x_i=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\lambda_i x_{i_j}$$

y restando miembro a miembro las dos últimas igualdades

$$0=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(\lambda_{i_j}-\lambda_i)x_{i_j}$$

lo que exige que $\alpha_j(\lambda_{i_j}-\lambda_i)=0\ \forall\ j=1,\ \ldots,\ k$, lo que a su vez implica que $\lambda_{i_j}-\lambda_i=0$ para algún valor de j y esto contradice a la hipótesis de que $\lambda_{i_j}\neq\lambda_i$.

De acuerdo con el lema anterior, si la ecuación característica tiene n raíces reales distintas, podemos hallar n vectores propios linealmente independientes y la matriz del endomorfismo φ respecto a la base constituida por estos vectores, será diagonal. Obsérvese que los elementos de la diagonal principal de esta matriz son los valores propios.

En resumen, *una matriz* T *cuadrada de orden* n, *que tiene* n *valores propios reales distintos, es diagonalizable.* Con esto queremos decir que existe una matriz regular A (llamada *matriz de paso*) tal que

$$ATA^{-1}=D,$$

siendo D una matriz regular.

Si dos matrices B y C verifican una relación del tipo $ABA^{-1}=C$, donde A es una matriz regular, se llaman *semejantes.* Luego, en las condiciones del párrafo anterior, T es semejante a una matriz diagonal.

EJEMPLO 1. La ecuación característica de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}-7 & -5 & -5\\ -5 & 2 & -4\\ -5 & -4 & 2\end{pmatrix}$$

es

$$|A-\lambda I|=-\lambda^3-3\lambda^2+90\lambda-216=0$$

y sus valores propios son

$$\lambda_1=3,\quad \lambda_2=6\quad \text{y}\quad \lambda_3=-12,$$

luego la matriz diagonal correspondiente es

$$D=\begin{pmatrix}3 & & \\ & 6 & \\ & & -12\end{pmatrix}.$$

Si una matriz T no tiene n valores propios distintos reales (bien porque tenga raíces imaginarias o porque siendo todas reales, una

al menos sea múltiple), dicha matriz pudiera no ser diagonalizable. Sin embargo se demuestra:

TEOREMA 1. *La condición necesaria y suficiente para que una matriz de orden* n *cuya ecuación característica tiene todas sus raíces reales, sea diagonalizable, es que si alguna de ellas es de multiplicidad* p, *el sistema* (108) *correspondiente a la misma sea de rango* $n-p$.

EJEMPLO 2. La ecuación característica de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 0 & -12 \\ -3 & 2 & -6 \\ \frac{3}{2} & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

es

$$|A-\lambda I|=-\lambda^3+3\lambda^2-4=0$$

y sus valores propios

$$\lambda_1=2, \quad \lambda_2=2, \quad \lambda_3=-1,$$

pero por ser el sistema

$$\begin{aligned} (-4-2)x_1 \qquad\quad &- \quad 12x_3=0 \\ -3x_1+(2-2)x_2 &- \quad 6x_3=0 \\ \frac{3}{2}x_1 \qquad\quad &+(5-2)x_3=0, \end{aligned}$$

de rango $1=3-2$, la matriz A es semejante a la

$$D=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que la semejanza de matrices es una relación de equivalencia.

2. Demuéstrese el teorema 1.

3. Demuéstrese que si dos matrices son semejantes tienen la misma ecuación característica.

4. Demuéstrese que no es cierto en general que dos matrices que tienen las mismas ecuaciones características son semejantes.

5. Demuéstrese que la suma de los elementos de la diagonal principal

de dos matrices semejantes es igual. Este número es, pues, un invariante de clase que se denomina *traza* de la matriz.

6. Demuéstrese que si dos matrices son semejantes, sus determinantes valen lo mismo.

7. Calcúlense los vectores propios de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 4 & 19 & -9 \\ 2 & 17 & -7 \end{pmatrix}.$$

18.4. Diagonalización de matrices simétricas.

TEOREMA 1. *Los valores propios de una matriz simétrica real* A, *son siempre reales.*

Demostración: Supongamos que λ es un valor propio imaginario de A, entonces su conjugado $\bar{\lambda}$ también lo será. Al valor propio λ le corresponderá un vector propio x y a $\bar{\lambda}$ otro vector propio cuyas coordenadas serán conjugadas de las de x, si llamamos X y $\bar{X}$ a las matrices de coordenadas de estos vectores, tendremos

$$XA=\lambda X \quad \text{y} \quad \bar{X}A=\bar{\lambda}\bar{X}. \tag{110}$$

Multiplicando la primera igualdad por $\bar{X}'$ por la derecha, obtenemos

$$XA\bar{X}'=\lambda X\bar{X}', \tag{110'}$$

pero $XA\bar{X}'$ es una matriz de una fila y una columna y, por tanto, igual a su transpuesta, luego

$$XA\bar{X}'=(XA\bar{X}')'=\bar{X}A'X'=\bar{X}AX'$$

de donde, teniendo en cuenta la segunda igualdad de (110),

$$XA\bar{X}'=\bar{\lambda}\bar{X}X',$$

que restada de la igualdad (110'), nos da

$$0=(\lambda-\bar{\lambda})\bar{X}X',$$

y si

$$\lambda=\alpha+\beta i, \quad \bar{\lambda}=\alpha-\beta i, \quad X=(x_1+iy_1,\ \ldots,\ x_n+iy_n)$$

y

$$\bar{X}=(x_1-iy_1,\ \ldots,\ x_n-iy_n),$$

esta última igualdad escrita en detalle será

$$0=2\beta i(x_1^2+y_1^2+\ldots+x_n^2+y_n^2),$$

lo que exige que $\beta=0$, luego λ es real.

TEOREMA 2. *A dos valores propios distintos,* $\lambda_1\neq\lambda_2$, *de una matriz simétrica real* A *corresponden vectores propios ortogonales.*

Demostración: Sean X e Y las matrices de coordenadas de los vectores propios correspondientes a λ_1 y λ_2, respectivamente, se verifica

$$XA=\lambda_1 X \quad \text{e} \quad YA=\lambda_2 Y,$$

de donde multiplicando la primera igualdad, por la derecha, por Y' tenemos

$$XAY'=\lambda_1 XY'$$

y, razonando igual que en el teorema anterior,

$$XAY'=(XAY')'=YAX'=\lambda_2 YX',$$

que restada miembro a miembro de la anterior nos da

$$0=(\lambda_1-\lambda_2)YX',$$

y puesto que, por hipótesis, $\lambda_1\neq\lambda_2$ se tiene que verificar

$$XY'=0$$

o, lo que es igual,

$$y\cdot x=0,$$

luego los vectores x e y son ortogonales.

TEOREMA 3. *Toda matriz simétrica real* A *es diagonalizable con una matriz de paso ortogonal.*

Sea $\varphi\colon V\longrightarrow V$ el endomorfismo de V caracterizado por A respecto a una cierta base de V, es decir,

$$\varphi(x)=XA,$$

donde X es la matriz de coordenadas del vector x en la base citada.

El ser simétrica la matriz A se traduce en la siguiente propiedad de φ,

$$x\cdot\varphi(y)=X(YA)'=XAY'=(XAY')'=YAX'=Y(XA)'=y\cdot\varphi(x).$$

En virtud del teorema 2 existe al menos un vector propio v_1 de φ, es decir, si V es la matriz de coordenadas de v_1

$$V_1 A = \lambda V_1.$$

Sea L_1 la variedad ortogonal a v_1. La restricción de φ a L_1 es también un endomorfismo simétrico, es decir, si $x, y \in L_1$:

1.° $\varphi(x) \in L$. En efecto,

$$v_1 \cdot \varphi(x) = x \cdot \varphi(v_1) = x \cdot \lambda v_1 = 0,$$

luego

$$\varphi(x) \in L_1.$$

2.° $x \cdot \varphi(y) = y \cdot \varphi(x)$ por verificarse ya en V.

Por la misma razón que para el endomorfismo φ, su restricción a la variedad L_1 posee al menos un vector propio v_2, que será naturalmente ortogonal a v_1.

Aplicando a la variedad L_2 ortogonal a v_1 y v_2 el mismo razonamiento que antes, llegaríamos a la conclusión de que existe en ella un vector propio del endomorfismo restricción de φ a L_2 y, reiterando el proceso un número de veces no superior a $n-1$, llegaríamos a una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de vectores ortogonales de V. Normalizándolos, es decir, dividiendo cada uno por su módulo, obtendríamos finalmente una base ortonormal, respecto a la cual la matriz del endomorfismo sería diagonal.

Ya estamos en situación de resolver el problema planteado en [18.1]. La solución viene dada por el siguiente

COROLARIO. *Dada una forma cuadrática simétrica f, respecto a un sistema de referencia de V existe otro sistema de referencia respecto al cual la matriz es diagonal. Además la matriz de paso es ortogonal.*

Este corolario es consecuencia de (98), (99) y de que si A es ortogonal $A^{-1} = A^t$.

De acuerdo con lo anterior, una forma cuadrática f sobre V admite la siguiente expresión respecto a un sistema de referencia de V,

$$(111) \qquad f(x) = d_1^2 x_1^2 + \cdots + d_p^2 x_p^2 - d_{p+1}^2 x_{p+1}^2 - \cdots - d_r^2 x_r^2,$$

donde hemos supuesto que se han reordenado los vectores de la base ortonormal obtenida de forma que en (111) aparezcan primero los positivos, siendo r el rango de la forma.

Haciendo el cambio $x_i = \frac{1}{d_i} x_i'$, la ecuación de la forma cuadrática sería

$$f(x) = x_1'^2 + \ldots + x_h'^2 - x_{h+1}'^2 - \ldots - x_r'^2 \tag{112}$$

y vamos a ver que

TEOREMA 4. (Ley de inercia de Sylvester). *El número* h *de términos positivos en la expresión diagonal de una forma cuadrática es un invariante, es decir, depende únicamente de la forma y no del procedimiento empleado para su diagonalización.*

Demostración: Supongamos que (112) es la expresión diagonal de f_c en la base $\{w_i\}_{1 \leq i \leq n}$ y

$$f_c(x) = x_1^{*2} + \ldots + x_{h'}^{*2} - x_{h'+1}^{*2} - \ldots - x_r^{*2} \tag{113}$$

en otra base $\{z_i\}_{1 \leq i \leq n}$. Supongamos que $h' < h$.

Si $x \in L = \{v_1, \ldots, v_h, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ tenemos que, de acuerdo con (112),

$$f_c(x) \geqq 0.$$

y (113) nos dice que $\forall\ x \in L' = \{z_{h'+1}, \ldots, z_r\}$

$$f_c(x) < 0.$$

Ahora bien $\dim L = n - (r-h)$ y $\dim L' = r - h'$ y teniendo en cuenta que

$$\dim (L \cup L') = \dim L + \dim L' - \dim (L \cap L')$$

tendríamos

$$\dim (L \cap L') = -n + n - (r-h) + r - h' = h - h' > 1$$

y entonces

$$L \cap L' \neq \{0\},$$

con lo que existiría un vector $x \in L \cap L'$, $x \neq 0$ para el que

$$f_c(x) \geqq 0 \quad \text{y} \quad f_c(x) < 0,$$

lo que es una contradicción.

Así hemos demostrado que h' no puede ser menor que h. De manera análoga se demostraría que h no puede ser menor que h', luego $h = h'$.

Por tanto, la expresión diagonal (112) de una forma cuadrática f_c es única; se le llama *expresión canónica* de la forma.

Al valor absoluto de la diferencia entre el número de términos positivos y negativos en la expresión canónica de una forma cuadrática se le llama *signatura* y es, evidentemente, un invariante.

Una forma cuadrática f_c se llama *definida positiva* si $f_c(x) \geqq 0$ para todo $x \in V$ y $f_c(x) = 0$ sólo para $x = 0$. Teniendo en cuenta la expresión canónica de la forma: *la condición necesaria y suficiente para que una forma sea definida positiva es que su rango sea* n *y sus valores propios sean todos positivos.*

Si $f_c(x) \geqq 0$ para todo $x \in V$, pero existe al menos un $x \neq 0$ tal que $f_c(x) = 0$, se dice que la forma es *semidefinida positiva.* En este caso *el rango tiene que ser menor que* n *y todos los valores propios han de ser positivos.*

El lector definirá la formas definidas negativas y semidefinidas negativas y razonará cómo están caracterizadas.

Si una forma cuadrática es tal que puede tomar valores positivos y negativos se le llama *indefinida.* Tiene que tener valores propios positivos y negativos y puede ser degenerada o no.

EJEMPLO 1. Las expresiones canónicas de todas las formas cuadráticas en V_2 son

$f_c(x) = x_1^2 + x_2^2$ definida positiva,
$f_c(x) = -x_1^2 - x_2^2$ definida negativa,
$f_c(x) = x_1^2 - x_2^2$ indefinida,
$f_c(x) = x_1^2$ semidefinida positiva,
$f_c(x) = -x_1^2$ semidefinida negativa.

EJEMPLO 2. Hállese la expresión canónica de la forma cuadrática que respecto a una cierta base de V tiene la expresión

$$f(c) = X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X'.$$

Ecuación característica $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 13\lambda + 6 = 0$. Valores propios

$$2 > 0, \quad \frac{5+\sqrt{13}}{2} > 0, \quad \frac{5-\sqrt{13}}{2} < 0,$$

luego su expresión será

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

es, por tanto, una forma no degenerada indefinida.

EJERCICIOS

1. Hállense los polinomios característicos de las matrices simétricas de segundo y tercer orden. Aplicación a los casos

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Dada la forma cuadrática

$$f_c(x)=2x_1x_2-x_1x_3+x_2x_3$$

hállese su rango, signatura, expresión canónica y clasifíquese.

3. Hállense los vectores propios de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Hállese una base de V en la que la forma cuadrática

$$f_c(x)=3x_1^2+3x_2^2+6x_3^2+2x_1x_2$$

tenga una expresión diagonal.

JAR"23

19

cónicas

19.1. Definiciones y notación.

Se llama cónica al conjunto de los puntos del plano cuyas coordenadas respecto a un sistema de referencia satisfacen una ecuación de la forma

$$c_{oo} + c_{o1}x_1 + c_{o2}x_2 + c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 = 0 \tag{114}$$

en la que el primer miembro es un polinomio de segundo grado en las dos variables x_1 y x_2.

La definición tiene sentido, pues si C es el conjunto de los puntos del plano cuyas coordenadas respecto a un cierto sistema de referencia satisfacen una ecuación de la forma (114), la ecuación de dicho lugar geométrico respecto a otro sistema de referencia será del mismo tipo, ya que al ser lineales las ecuaciones del cambio de sistema de referencia, el grado del primer miembro de (114) permanecerá inalterado.

El lector conoce ya varios ejemplos de cónicas:

$$\frac{x_1^2}{a} + \frac{x_2^2}{b} = 1$$

es la ecuación de una elipse referida a sus dos ejes.

$$x_1^2 + x_2^2 = 4$$

es la ecuación de una circunfernecia de centro el origen y radio 2.

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 + 5)^2 = 16$$

es la ecuación de una circunferencia de centro el punto $(3, -5)$ y radio 4, etc.

Quizá no le resulten tan familiares estos otros:

$$x_1^2 - x_2^2 = 0$$

es la ecuación del par de bisectrices de los ejes. En efecto, dicha ecuación es equivalente a las ecuaciones $x_1+x_2=0$ o $x_1-x_2=0$. Con ello queremos decir que si las coordenadas de un punto verifican aquella ecuación, verifican al menos una de éstas, y recíprocamente.

$$x_1^2=0$$

es el eje de ordenadas contado dos veces $x_1=0$.

En general, si

$$r\equiv ax_1+bx_2+c=0 \quad \text{y} \quad s\equiv a'x_1+b'x_2+c'=0$$

son las ecuaciones de dos rectas cualesquiera del plano (distintas o confundidas),

$$(ax_1+bx_2+c)(a'x_1+b'x_2+c')=0$$

es la ecuación de una cónica. Es decir, el conjunto constituido por los puntos de dos rectas del plano (distintas o confundidas) es una cónica.

También $x_1^2+x_2^2=-1$ es la ecuación de una cónica. Ahora bien, no existe ningún punto del plano cuyas coordenadas verifiquen dicha ecuación (la suma de los cuadrados de dos números reales no puede ser negativo); luego dicha ecuación representaría al conjunto vacío.

La ecuación $x_1^2+x_2^2=0$ también sería la de una cónica. En este caso sólo existe un punto, el origen, que pertenezca a dicha cónica.

Con objeto de generalizar algunos resultados y de uniformar las definiciones será conveninete añadir al plano cierto puntos ideales. Estos puntos serán los que tienen al menos una de sus coordenadas imaginarias, razón por la cual les llamaremos *puntos imaginarios* del plano, en contraposición de los puntos ordinarios a los que denominaremos *puntos reales.*

Así, la cónica $x_1^2+x_2^2=-1$ ya no será el conjunto vacío, pues, por ejemplo, el punto $(i, 0)$ le pertenece, A una cónica de este tipo que tien todos sus puntos imaginarios, o todos excepto uno, le llamaremos *cónica imaginaria.*

La ecuación de una cónica puede escribirse en forma matricial de infinitas maneras. Así la cónica de ecuación

$$3+6x_1-2x_2+4x_1^2-x_1x_2+3x_2^2=0$$

puede escribirse de las siguientes formas

$$X\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \\ -6 & -2 & 3 \end{pmatrix}X'=0, \qquad X\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}X'=0,$$

donde hemos llamado X a la matriz $(1, x_1, x_2)$. Obsérvese que si

$XAX'=0$ es cualquiera de las expresiones matriciales de (114) y $(a_{ij})=A$ se tiene que verificar que $c_{ij}=a_{ij}+a_{ji}$ si $i\neq j$ y $c_{ii}=a_{ii}$. Entonces si tomamos $a_{ij}=a_{ji}$, la matriz de la cónica será simétrica y estará determinada por (114) de manera única, pues $a_{ij}=a_{ji}=\dfrac{c_{ij}}{2}$ si $i\neq j$, $a_{ii}=c_{ii}$. De ahora en adelante siempre que escribamos la ecuación de una cónica en forma matricial, la matriz A será simétrica.

EJEMPLO 1. La cónica anterior, en forma matricial, se escribirá:

$$X\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}X'=0.$$

19.2. Ecuaciones reducidas de las cónicas.

En los ejemplos anteriores hemos visto la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y otra con el centro en un punto cualquiera. Salta a la vista que la primera es mucho más sencilla que la segunda. La ecuación $3x_1^2+2x_2^2=6$ representa una elipse referida a sus ejes. Si efectuamos el cambio de sistema de referencia de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1&=1+2x_1'-x_2' \\ x_2&=6-x_1'+3x_2' \end{aligned}$$

la ecuación de la elipse respecto al nuevo sistema será

$$3(1+2x_1'-x_2')^2+2(6-x_1'+3x_2')^2=6$$

y efectuando operaciones

$$75+13x_1'^2+12x_2'^2-18x_1'+69x_2'-24x_1'x_2'=0,$$

sin género de dudas esta ecuación es más complicada que la ecuación respecto al sistema de referencia original.

Surgen, pues, de manera natural los siguientes problemas:

1.° Dada la ecuación de una cónica respecto a un sistema de referencia, hallar un sistema de referencia privilegiado, respecto al cual la ecuación de la cónica sea lo más sencilla posible. A esta forma sencilla la llamaremos *ecuación reducida.*

2.° Clasificar las cónicas de acuerdo con las distintas expresiones de sus ecuaciones reducidas.

De ahora en adelante todos los sistemas de referencia que utilicemos serán métricos.

Recordemos que la expresión matricial de un cambio de sistema de referencia en el plano (de sistema de referencia métrico a sistema de referencia métrico) es de la forma

$$Y = Y^* \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_2 \\ 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \mp\operatorname{sen}\alpha & \pm\cos\alpha \end{pmatrix} = Y^* S$$

donde (t_1, t_2) son las coordenadas del nuevo origen respecto al primer sistema y α el ángulo que giran los ejes. Dicho cambio puede pensarse efectuado en dos etapas: primero, un giro de ejes con centro el origen y a continuación una traslación conservando la dirección de los nuevos ejes y cambiando de origen.

Sea $\mathcal{C}$ la cónica de ecuación matricial

$$\text{(115)} \qquad \mathcal{C} \equiv XAX' = 0, \quad A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Dicha ecuación nos va a convenir escribirla de la siguiente forma:

$$\text{(116)} \quad \mathcal{C} \equiv (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2(x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix} + a_{00} = 0.$$

Obsérvese que el primer término del primer miembro es una forma cuadrática simétrica en las variables x_1 y x_2. Sabemos por el Corolario de [18.4] que la matriz de dicha forma es diagonalizable con una matriz de paso ortogonal; ahora bien, si recordamos el Ej. 3 de [9.6], podemos afirmar que existe un ángulo α tal que, la ecuación de $\mathcal{C}$ respecto al sistema de referencia que resulta de girar los ejes del antiguo, un ángulo α, con centro en el origen, tiene su parte cuadrática diagonal. Sea

$$\text{(117)} \quad \mathcal{C} \equiv (y_1 \quad y_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 2(y_1 \quad y_2) \begin{pmatrix} b_{01} \\ b_{02} \end{pmatrix} + b_{00} = 0$$

la ecuación de la cónica respecto al segundo sistema, donde λ_1 y λ_2 son los valores propios de la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Efectuemos ahora una traslación de ejes, de ecuaciones

$$y_1 = z_1 + t_1$$
$$y_2 = z_2 + t_2$$

con lo que la ecuación de la cónica respecto al sistema final será:

$$(z_1 \quad z_2)\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}+2(z_1 \quad z_2)\left[\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1\\ t_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{01}\\ b_{02}\end{pmatrix}\right]+$$
$$+(t_1 \quad t_2)\left[\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1\\ t_2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}b_{01}\\ b_{02}\end{pmatrix}\right]+b_{00}=0,$$

luego la matriz de la cónica será ahora

$$(118)\quad C=\begin{pmatrix} b_{00}+2b_{01}t_1+2b_{02}t_2+\lambda_1t_1^2+\lambda_2t_2^2 & b_{01}+\lambda_1t_1 & b_{02}+\lambda_2t_2\\ b_{01}+\lambda_1t_1 & \lambda_1 & 0\\ b_{02}+\lambda_2t_2 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}c_{00} & c_{01} & c_{02}\\ c_{01} & c_{11} & 0\\ c_{02} & 0 & c_{22}\end{pmatrix}.$$

Todavía no hemos decidido qué punto del plano ha de ser el nuevo origen, es decir, podemos elegir según nos convenga los números t_1 y t_2. La elección la haremos de forma que la matriz C sea lo más sencilla posible. Pueden ocurrir los siguientes casos:

1.° $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$. Tomando $t_1=-\dfrac{b_{01}}{\lambda_1}$ y $t_2=-\dfrac{b_{02}}{\lambda_2}$ resultaría $c_{01}=c_{02}=0$, con lo que la ecuación de la cónica quedaría en la forma

$$(119)\qquad Z\begin{pmatrix}c_{00} & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2\end{pmatrix}Z'=0, \qquad c_{00}+\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2=0$$

Las cónicas de este tipo admiten dos ejes de simetría y un centro de simetría. En efecto, si

$$P(p_1,p_2)\in\mathcal{C}\Longrightarrow c_{00}+\lambda_1p_1^2+\lambda_2p_2^2=0,$$

pero entonces

$$c_{00}+\lambda_1p_1^2+\lambda_2(-p_2)^2=0,$$

con lo que el simétrico de P respecto al eje de abscisas también pertenece a C, luego el eje de abscisas $z_2=0$ es eje de simetría de la cónica. Igual podría razonarse para demostrar la simetría respecto al eje de ordenadas y de la simetría respecto a ambos ejes resulta la simetría respecto al origen. Esta es la razón por la que a las cónicas de este tipo se les llama *cónicas con centro.*

2.° $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2=0$. Tomando $t_1=-\dfrac{b_{01}}{\lambda_1}$ podemos hacer $c_{01}=0$. Pueden ocurrir los siguientes subcasos:

a) $b_{02} \neq 0$. Entonces tomando $t_2 = -\dfrac{b_{00} + 2b_{01}t_1 + \lambda_1 t_1^2}{2b_{02}}$ obtendremos $c_{00} = 0$ y la ecuación de la cónica será:

$$(120) \qquad Z \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{02} \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ b_{02} & 0 & 0 \end{pmatrix} Z' = 0, \quad 2b_{02}z_2 + \lambda_1 z_1^2 = 0.$$

Estas cónicas no admiten más que un eje de simetría. A las cónicas de este tipo se les llama *parábolas.*

b) $b_{02} = 0$. En este caso la elección de t_2 no tiene ninguna influencia en la matriz de la cónica y la ecuación de ésta sería:

$$(121) \qquad Z \begin{pmatrix} c_{00} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Z' = 0, \quad c_{00} + \lambda_1 z_1^2 = 0.$$

A las cónicas de los apartados *a)* y *b)* se les llama *cónicas de tipo parabólico.*

3.° $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. En este caso la ecuación de la cónica sería:

$$(122) \qquad c_{00} + 2c_{01}z_1 + 2c_{02}z_2 = 0,$$

que es la ecuación de una recta y no de una cónica. Veremos más adelante cómo este tipo también puede incluirse en el conjunto de las cónicas.

INVARIANTES MÉTRICOS.

La matriz C de la cónica en su forma reducida está relacionada con la matriz A de la ecuación original de la cónica por

$$C = SAS'$$

siendo S la matriz del cambio total de sistema de referencia (giro y traslación).

Tomando determinantes en ambos miembros de la igualdad anterior

$$(123) \qquad |C| = |S|\,|A|\,|S'| = |A|,$$

puesto que

$$|S| = |S'| = \pm 1.$$

Si hacemos $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$, $\mathbf{0} = (0, 0)$, $S_0 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \mp \operatorname{sen}\alpha & \pm\cos\alpha \end{pmatrix}$,

$\mathbf{a}=(a_{01},\ a_{02})$ y $A_0=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, tenemos que

$$C=\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{t} \\ 0' & S_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{00} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}' & A_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{t}' & S_0' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{00}+2\mathbf{a}\mathbf{t}'+\mathbf{t}A_0\mathbf{t}' & \mathbf{a}S_0'+\mathbf{t}A_0S_0' \\ S_0\mathbf{a}'+S_0A_0\mathbf{t}' & S_0A_0S_0' \end{pmatrix}$$

Entonces $C_0=S_0A_0S_0'$. Tomando determinantes

$$C_{00}=|S_0|A_{00}|S_0'|=A_{00}, \tag{124}$$

ya que

$$|S_0|=|S_0'|=\pm 1.$$

Puesto que

$$c_{11}=\lambda_1=a_{11}\cos^2\alpha\pm 2a_{12}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+a_{22}\operatorname{sen}^2\alpha$$

y

$$c_{22}=\lambda_2=a_{11}\operatorname{sen}^2\alpha\mp 2a_{12}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+a_{22}\cos^2\alpha,$$

tenemos que

$$c_{11}+c_{22}=a_{11}+a_{22}. \tag{125}$$

A los números $a_{11}+a_{22}$, A_{00} y $|A|$, que dependen exclusivamente de la cónica y no del sistema de referencia métrico elegido para representarla, se les llama invariantes métricos, lineal, cuadrático y cúbico. Nosotros les representaremos por I_1, I_2 e I_3, respectivamente.

EJEMPLO 1. Los invariantes de la cónica

$$3-2x_1+4x_2-5x_1^2+6x_1x_2-x_2^2=0$$

son

$$I_1=-5-1=-6,\quad I_2=\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-4,$$

$$I_3=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-3.$$

CÁLCULO DE LAS ECUACIONES REDUCIDAS DE LAS CÓNICAS.

Los invariantes que acabamos de deducir nos van a servir para resolver el problema siguiente:

Dada una cónica $\mathcal{C}$ mediante su ecuación (115), respecto a un sistema de referencia métrico, hallar su ecuación reducida.

1. CÓNICAS CON CENTRO.

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2,$$
$$I_2 = A_{00} = \lambda_1 \lambda_2,$$
$$I_3 = |A| = c_{00} \lambda_1 \lambda_2,$$

de donde $c_{00} = \dfrac{|A|}{A_{00}}$ y λ_1 y λ_2 serán las raíces de la ecuación

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + A_{00} = 0.$$

2. PARÁBOLAS.

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = \lambda_1,$$
$$I_3 = |A| = -b_{02}^2 \lambda_1,$$

luego

$$b_{02} = \sqrt{\frac{-|A|}{a_{11} + a_{22}}}$$

3. CÓNICAS DE TIPO PARABÓLICO NO PARÁBOLAS.

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = \lambda_1.$$

En este caso, $I_2 = I_3 = 0$, luego los invariantes no nos permiten calcular c_{00}.

Ahora bien,

$$b_{02} = 0, \quad \lambda_2 = 0 \quad \text{y} \quad t_1 = -\frac{b_{01}}{\lambda_1},$$

luego

$$c_{00} = a_{00} - \frac{b_{01}^2}{a_{11} + a_{22}},$$

pero

$$b_{01} = a_{01} \cos \alpha \pm a_{02} \operatorname{sen} \alpha$$

y

$$b_{02} = a_{01} \operatorname{sen} \alpha \mp a_{02} \cos \alpha = 0$$

eliminando sen α y cos α entre ambas ecuaciones nos queda

$$b_{01} = \sqrt{a_{01}^2 + a_{02}^2}$$

luego

$$c_{00} = a_{00} - \frac{a_{01}^2 + a_{02}^2}{a_{11} + a_{22}} = \frac{a_{00}a_{11} + a_{00}a_{22} - a_{01}^2 - a_{02}^2}{a_{11} + a_{22}} = \frac{A_{11} + A_{22}}{a_{11} + a_{22}}$$

EJEMPLO 2. Sabiendo que la cónica de ecuación

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - 2x_2 + 1 = 0$$

es una parábola, su ecuación reducida se obtiene calculando

$$\lambda = 1+1 = 2 \quad \text{y} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{9}{4}$$

luego

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} x_2 + 2x_1^2 = 0$$

será dicha ecuación reducida.

EJERCICIOS

1. Sabiendo que

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 3x_1 + 3x_2 + 2 = 0$$

es la ecuación de una cónica de tipo parabólico no parábola, **hállese su** ecuación reducida.

2. Sabiendo que

$$3x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 2 = 0$$

es la ecuación de una cónica con centro, hállese su ecuación reducida.

3. Sabiendo que

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 + 2x_2 + 1 = 0$$

es la ecuación de una parábola, hállese su ecuación reducida.

19.3. Clasificación afín y métrica de las cónicas.

Nos proponemos ahora obtener criterios que, utilizando únicamente los coeficientes de la ecuación de una cónica respecto a un sistema de referencia métrico cualquiera, nos permita conocer a qué tipo pertenece.

Pero antes vamos a hacer una clasificación de las cónicas más completa que la efectuada en el párrafo anterior.

1. CÓNICAS CON CENTRO.

Se pueden presentar los siguientes casos según los signos de los coeficientes c_{∞}, λ_1 y λ_2:

a_1) $c_{\infty} \neq 0$, $\operatorname{sg} c_{\infty} = \operatorname{sg} \lambda_1 = \operatorname{sg} \lambda_2$ (utilizamos sg como abreviatura

de signo). Entonces la ecuación reducida de la cónica se puede escribir en la forma

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=-1,$$

se trata de una cónica imaginaria a la que se suele llamar *elipse imaginaria.*

b_1) $\operatorname{sg} c_{oo} \neq \operatorname{sg} \lambda_1 = \operatorname{sg}\lambda_2$. Entonces

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1,$$

la cónica es una *elipse.*

c_1) $c_{oo} \neq 0$ y $\operatorname{sg} \lambda_1 \neq \operatorname{sg} \lambda_2$,

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1,$$

la cónica es una *hipérbola.*

d_1) $c_{oo}=0$ y $\operatorname{sg} \lambda_1 \neq \lambda_2$. En este caso

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=0,$$

o bien,

$$\left(\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{b}\right)\left(\frac{x_1}{a}-\frac{x_2}{b}\right)=0,$$

se trata de *dos rectas reales no paralelas.*

e_1) $c_{oo}=0$ y $\operatorname{sg} \lambda_1 = \operatorname{sg} \lambda_2$,

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=0,$$

o bien,

$$\left(\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{b}i\right)\left(\frac{x_1}{a}-\frac{x_2}{b}i\right)=0,$$

donde i representa la unidad imaginaria. Se les llama *rectas imaginarias conjugadas no paralelas.*

2. Cónicas de tipo parabólico.

a_2) $$2c_{o2}x_2+\lambda_1 x_1^2=0$$

es una *parábola.*

b_2) Si $c_{oo}+\lambda_1 x_1^2=0$ y $\operatorname{sg} c_{oo} \neq \operatorname{sg} \lambda_1$,

$$x_1^2-a^2=0,$$

o bien,

$$(x_1+a)(x_1-a)=0,$$

se trata de *dos rectas reales paralelas.*

c_2) Si $\operatorname{sg} c_{oo} = \operatorname{sg} \lambda_1$,

$$x_1^2 + a^2 = 0,$$

de donde

$$(x_1 + ai)(x_1 - ai) = 0,$$

se les llama *rectas imaginarias paralelas.*

d_2) $c_{oo} = 0$, entonces

$$x_1^2 = 0$$

dos rectas reales confundidas.

Por último, si en la elipse $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$, $a = b$, dicha cónica es una circunferencia, y si en la hipérbola $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$, $a = b$, se dice que es una hipérbola equilátera.

En las cónicas de los tipos a_1), b_1), c_1) y a_2) se tiene que $|C| \neq 0$, luego $|A| \neq 0$, en las restantes $|C| = |A| = 0$. Obsérvese que estas últimas se descomponen en rectas mientras que las primeras no se descomponen. Este hecho geométrico es equivalente a la posibilidad o imposibilidad de descomponer el polinomio cuadrático que representa a la cónica en producto de dos polinomios lineales. Por esa razón a las cónicas que verifican $|A| \neq 0$ se les llama *irreducibles* o *no degeneradas,* y a las otras, *reducibles* o *degeneradas.*

Teniendo en cuenta la clasificación anterior, el lector razonará como ejercicio el siguiente cuadro.

- Cónicas
  - $|A| \neq 0$ irreducibles
    - $A_{oo} \neq 0$ con centro
      - $A_{oo} > 0$ Elipses
        - $\operatorname{sg}(a_{11} + a_{22}) = \operatorname{sg}|A|$ imaginaria
        - $\operatorname{sg}(a_{11} + a_{22}) \neq \operatorname{sg}|A|$ real
      - $A_{oo} < 0$ Hipérbola
    - $A_{oo} = 0$ Parábola
  - $|A| = 0$ reducibles
    - $A_{oo} \neq 0$ con centro
      - $A_{oo} > 0$ dos rectas imaginarias no paralelas
      - $A_{oo} < 0$ dos rectas reales no paralelas
    - $A_{oo} = 0$ dos rectas paralelas
      - $A_{11} + A_{22} \neq 0$ distintas
        - $A_{11} + A_{22} > 0$ imaginarias conjugadas
        - $A_{11} + A_{22} < 0$ reales
      - $A_{11} + A_{22} = 0$ confundidas

EJEMPLO 1. En la cónica de ecuación

$$4-6x_1+6x_2+2x_1^2-4x_1x_2+2x_2^2=0$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

luego es reducible.

$$A_{\infty}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

y, por tanto, es un par de rectas paralelas.

$$A_{11}+A_{22}=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=-1-1=-2<0,$$

por lo que las rectas son reales distintas.

En la circunferencia $a=b$, o lo que es igual $\lambda_1=\lambda_2$, pero λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+A_{\infty}=0,$$

luego el discriminante de esta ecuación habrá de ser nulo.

$$0=(a_{11}+a_{22})^2-4A_{\infty}=a_{11}^2+2a_{11}a_{22}+a_{22}^2-4a_{11}a_{22}+4a_{12}^2=$$
$$=(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2$$

lo que exgie que $a_{11}-a_{22}=0$ y $a_{12}=0$. Luego para que la cónica de ecuación (115) sea una circunferencia es necesario que $a_{11}=a_{22}$ y $a_{12}=0$.

Si (115) es la ecuación de una hipérbola equilátera $\lambda_1+\lambda_2=0$ o, lo que es igual $a_{11}+a_{22}=0$.

EJEMPLO 2. La cónica de ecuación

$$2-2x_1+4x_2+3x_1^2-4x_1x_2-3x_2^2=0$$

es una hipérbola equilátera, pues

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}\neq 0, \quad A_{\infty}=-13<0 \quad \text{y} \quad a_{11}+a_{22}=3-3=0.$$

EJERCICIOS

1. Clasifíquense las cónicas siguientes:

a) $4x_1^2+x_2^2+4x_1x_2-x_2=0$
b) $2x_1^2-x_1x_2-x_2^2+2x_1+x_2=0$
c) $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+1=0$
d) $x_1^2-x_1x_2-2x_2^2+3x_1-6x_2+3=0$
e) $3x_1^2+3x_2^2-12x_1+18x_2+38=0$
f) $7x_1^2+7x_2^2-2x_1x_2+12x_1+12x_2-180=0$
g) $8x_1^2-8x_2^2+10x_1x_2-12x_1-8x_2=0$
h) $x_1^2+x_2^2-2x_1+1=0$
i) $5x_1^2+5x_2^2-2x_1x_2+6=0$.

2. Clasifíquense y hállense las ecuaciones reducidas de las cónicas siguientes:

a) $1-2x_2+4x_1^2-4x_1x_2+x_2^2=0$
b) $-5x_1^2+x_2^2-14x_1x_2-1=0$
c) $5x_1^2-3x_2^2-6x_1x_2+38x_1+6x_2+29=0$
d) $2x_1x_2-5=0$
e) $3x_1^2+x_2^2-5x_1x_2+3x_1+2=0$.

3. Dada la cónica de ecuación

$$4x_1^2-(1+\lambda)x_1x_2-(4-\lambda)x_2^2+2(1+\lambda)x_1+(1+\lambda)x_2=0,$$

hállese para qué valores de λ es degenerada.

4. Clasifíquense las cónicas de ecuación

$$x_1^2+2\lambda x_1x_2+x_2^2-5x_1-7x_2+6=0$$

según los valores de λ.

5. Hállese para qué valores de λ la ecuación siguiente

$$x_1^2-2\lambda x_1x_2+2\lambda x_2^2-2x_1+4\lambda x_2=0$$

representa

a) una parábola,
b) una hipérbola equilátera,
c) una elipse.

CAFE - BAR LIBA
JAR'23

20

cuádricas

20.1. Definiciones y notación.

Se llama cuádrica al conjunto de los puntos de espacio tridimensional cuyas coordenadas respecto a un sistema de referencia satisfacen una ecuación de la forma

$$c_{oo} + c_{o1}x_1 + c_{o2}x_2 + c_{o3}x_3 + c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_{22}x_2^2 + c_{23}x_2x_3 + c_{33}x_3^2 = 0$$

en la que el primer miembro es un polinomio en x_1, x_2, x_3 de segundo grado.

La definición tiene sentido por razones análogas a las aducidas en el caso de las cónicas.

El ejemplo de cuádrica mejor conocido por el lector es el de la superficie esférica de centro el origen y radio r, cuya ecuación es

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2.$$

De acuerdo con la definición, el conjunto de los puntos de dos planos distintos o confundidos es una cuádrica, pues si las ecuaciones de los planos son

$$a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 + d = 0$$
$$a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0$$

la ecuación

$$(ax_1 + bx_2 + cx_3 + d)\,(a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d') = 0$$

es la de una cuádrica y los únicos puntos del espacio cuyas coordenadas satisfacen dicha ecuación son los que pertenecen a uno u otro plano.

La ecuación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1$ también representa a una cuádrica, la cual no tiene más que puntos imaginarios, es, pues, una cuádrica imaginaria.

La ecuación de una cuádrica se puede escribir matricialmente de infinitas maneras. Al igual que con las cónicas adoptaremos como matriz de la cuádrica la única que es simétrica.

Los problemas que vamos a resolver son los mismos que se nos plantearon en el caso de las cónicas:

1.°, ver cuántos tipos de cuádricas existen;
2.°, obtener unos criterios de clasificación, y
3.°, hallar unas fórmulas que nos permitan calcular sus ecuaciones reducidas.

Los sistemas de referencia serán siempre métricos.

20.2. Ecuaciones reducidas de las cuádricas.

Sea una cuádrica $\mathcal{C}$ cuya expresión matricial respecto a un cierto sistema de referencia es

$$(126) \qquad XAX'=0 \quad \text{con} \quad A=\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{13} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Tratamos de hallar un sistema de referencia, respecto al cual la ecuación de $\mathcal{C}$ sea lo más sencilla posible. Supongamos que la expresión matricial del cambio del sistema original al deseado es

$$(127) \qquad \mathbf{X}=\mathbf{Z}S, \qquad |S| \neq 0,$$

el cual podemos descomponer en dos etapas:

1.° Un giro de ejes de ecuación

$$(128) \quad X=YG \quad \text{con} \quad G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0' & G_0 \end{array}\right)$$

donde la matriz G_0 es, como sabemos por [17.6], ortogonal.

2.° Una traslación de ejes, tomando como nuevo origen el punto O' de coordenadas (t_1, t_2, t_3) respecto al segundo sistema de referencia. La expresión matricial de este cambio es

$$(129) \qquad Y=ZT \quad \text{con} \quad T=\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_2 & t_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{t} \\ \hline 0' & I \end{array}\right).$$

donde hemos hecho $\mathbf{t}=(t_1, t_2, t_3)$.

Evidentemente,

$$S=TG. \tag{130}$$

Al igual que en el caso de las cónicas, nos va a convenir escribir la ecuación (126) de $\mathcal{C}$ en la forma

$$\mathcal{C}\equiv(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+2(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} a_{o1} \\ a_{o2} \\ a_{o3} \end{pmatrix}+a_{oo}=0. \tag{131}$$

El primer término del primer miembro de esta ecuación es una forma cuadrática en x_1, x_2, x_3, luego, de acuerdo con el corolario de [18.4] y a lo dicho anteriormente sobre la matriz G_o, existe un giro de ejes tal que la matriz transformada de la

$$A_o=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

es diagonal. Supondremos que hemos elegido el giro de ejes (caracterizado por la matriz G) de forma que esto suceda y que la ecuación de la cuádrica es, respecto al nuevo sistema

$$\mathcal{C}\equiv(y_1 \quad y_2 \quad y_3)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}+2(y_1 \quad y_2 \quad y_3)\begin{pmatrix} b_{o1} \\ b_{o2} \\ b_{o3} \end{pmatrix}+b_{oo}=0, \tag{132}$$

donde

$$B=\begin{pmatrix} b_{oo} & b_{o1} & b_{o2} & b_{o3} \\ b_{o1} & \lambda_1 & & \\ b_{o2} & & \lambda_2 & \\ b_{o3} & & & \lambda_3 \end{pmatrix}=GAG',$$

es la nueva matriz de $\mathcal{C}$, siendo λ_1, λ_2 y λ_3 los valores propios de la matriz A_o.

Si efectuamos ahora la traslación de ejes de ecuación (129), obtendremos

$$\mathcal{C}\equiv(z_1 \quad z_2 \quad z_3)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}+ \tag{133}$$

$$+2(z_1 \quad z_2 \quad z_3)\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{o1} \\ b_{o2} \\ b_{o3} \end{pmatrix}\right]+$$

$$+(t_1 \quad t_2 \quad t_3)\left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} b_{o1} \\ b_{o2} \\ b_{o3} \end{pmatrix}\right]+b_{oo}=0$$

y la matriz de la cuádrica será

$$C=\begin{pmatrix} c_{oo} & c_{o1} & c_{o2} & c_{o3} \\ c_{o1} & \lambda_1 & 0 & 0 \\ c_{o2} & 0 & \lambda_2 & 0 \\ c_{o3} & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} c_{oo} & \mathbf{c} \\ \hline \mathbf{c}' & C_o \end{array}\right)$$

donde

$$c_{oo}=b_{oo}+2b_{o1}t_1+2b_{o2}t_2+2b_{o3}t_3+\lambda_1 t_1^2+\lambda_2 t_2^2+\lambda_3 t_3^2,$$
$$c_{o1}=b_{o1}+\lambda_1 t_1, \quad c_{o2}=b_{o2}+\lambda_2 t_2, \quad c_{o3}=b_{o3}+\lambda_3 t_3.$$

Todavía no hemos precisado qué punto ha de ser el nuevo origen. Lo elegimos de tal forma que la matriz C sea lo más sencilla posible. Pueden ocurrir los siguientes casos:

1.° $\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 \neq 0.$

Tomando $t_1=-\dfrac{b_{o1}}{\lambda_1}$, $t_2=-\dfrac{b_{o2}}{\lambda_2}$ y $t_3=-\dfrac{b_{o3}}{\lambda_3}$ conseguimos anular los términos c_{o1}, c_{o2} y c_{o3}, con lo que la expresión de $\mathcal{C}$ será

$$(134) \qquad Z\begin{pmatrix} c_{oo} & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_3 \end{pmatrix} Z'=0, \qquad c_{oo}+\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+\lambda_3 z_3^2=0.$$

Este tipo de cuádricas admiten tres planos de simetría, tres ejes de simetría y, por tanto, un centro de simetría, razón por la cual se las llama *cuádricas con centro.*

2.° $\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0.$

Tomando $t_1=-\dfrac{b_{o1}}{\lambda_1}$, $t_2=-\dfrac{b_{o2}}{\lambda_2}$ podemos anular c_{o1} y c_{o2}. Se pueden presentar ahora los siguientes subcasos:

a) que $b_{o3} \neq 0$. Entonces, haciendo

$$t_3=-\frac{b_{oo}+2b_{o1}t_1+2b_{o2}t_2+\lambda_1 t_1^2+\lambda_2 t_2^2}{2b_{o3}}$$

conseguimos que se anule c_{oo}, con lo que

$$(135) \qquad Z\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{o3} \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ c_{o3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Z'=0, \qquad 2c_{o3}z_3+\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2=0.$$

A este tipo de cuádricas que tienen dos planos de simetría y, por tanto, un eje de simetría, se les denomina *paraboloides.*

b) que $b_{o3}=0$ y $c_{oo}\neq 0$. Entonces no se puede efectuar más reducción y la elección de t_3 es indiferente. En este caso

$$(136)\qquad Z\begin{pmatrix} c_{oo} & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} Z'=0, \qquad c_{oo}+\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2=0.$$

Tipo de cuádricas con dos planos de simetría y un eje de simetría. Se las llama *cilindros no parabólicos.*

c) que $b_{o3}=0$ y $c_{oo}=0$.

$$(137)\qquad Z\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} Z'=0, \qquad \lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2=0.$$

Cuádricas con dos planos de simetría y un eje de simetría. Veremos que son *pares de planos no paralelos.*

3.° $\lambda_1\neq 0, \quad \lambda_2=\lambda_3=0.$

Tomando $t_1=-\dfrac{b_{o1}}{\lambda_1}$ se tiene que $c_{o1}=0$.

Se pueden presentar los siguientes subcasos:

a) que $b_{o2}\neq 0$ y $b_{o3}\neq 0$. Entonces, tomando

$$t_2=-\frac{b_{oo}+2b_{o1}t_1+2b_{o2}t_2+\lambda_1 t_1^2}{2b_{o2}},$$

tendremos

$$Z\begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{o2} & c_{o3} \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ c_{o2} & 0 & 0 & 0 \\ c_{o3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Z'=0.$$

Haciendo un nuevo giro de ejes de ecuación

$$Z=W\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

obtenemos

$$\mathcal{C} \equiv W \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{02}\cos\beta + c_{03}\operatorname{sen}\beta - c_{02}\operatorname{sen}\beta + c_{03}\cos\beta \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ c_{02}\cos\beta + c_{03}\operatorname{sen}\beta & 0 & 0 & 0 \\ -c_{02}\operatorname{sen}\beta + c_{03}\cos\beta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} W' = 0$$

y tomando $\beta = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{c_{03}}{c_{02}}$, resulta finalmente

$$(138) \qquad W \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{02} & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ d_{02} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} W' = 0, \qquad 2d_{02}w_2 + \lambda_1 w_1^2 = 0.$$

Este tipo de cuádricas, llamadas *cilindros parabólicos,* no tienen más que un plano de simetría.

b) Si $b_{02} = b_{03} = 0$, la ecuación de la cuádrica ya no se puede reducir más y queda en la forma

$$(139) \qquad Z \begin{pmatrix} c_{00} & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} Z' = 0, \qquad c_{00} + \lambda_1 z_1^2 = 0.$$

Cuádricas que no admiten más que un plano de simetría, son *planos paralelos.*

4.° $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Entonces

$$(140) \qquad \mathcal{C} \equiv c_{00} + 2c_{01}z_1 + 2c_{02}z_2 + 2c_{03}z_3 = 0$$

y $\mathcal{C}$ es un plano.

Las cuádricas con centro se pueden clasificar atendiendo a los signos de c_{00}, λ_1, λ_2 y λ_3.

$a_1)$ $\operatorname{sg} c_{00} = \operatorname{sg}\lambda_1 = \operatorname{sg}\lambda_2 = \operatorname{sg}\lambda_3$:

$$(141) \qquad \mathcal{C} \equiv \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = -1.$$

Elipsoide imaginario.

$b_1)$ $\operatorname{sg} c_{00} \neq \operatorname{sg}\lambda_1 = \operatorname{sg}\lambda_2 = \operatorname{sg}\lambda_3$:

$$(142) \qquad \mathcal{C} \equiv \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1.$$

Elipsoide real.

c_1) $\operatorname{sg} c_\infty \neq \operatorname{sg}\lambda_1 = \operatorname{sg}\lambda_2 \neq \operatorname{sg}\lambda_3$:

$$\mathcal{C} \equiv \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1. \tag{143}$$

Hiperboloide hiperbólico.

d_1) $\operatorname{sg} c_\infty \neq \operatorname{sg}\lambda_1 \neq \operatorname{sg}\lambda_2 = \operatorname{sg}\lambda_3$:

$$\mathcal{C} \equiv \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1. \tag{144}$$

Hiperboloide elíptico.

e_1) $c_\infty = 0$, $\operatorname{sg}\lambda_1 = \operatorname{sg}\lambda_2 = \operatorname{sg}\lambda_3$:

$$\mathcal{C} \equiv \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 0. \tag{145}$$

Cono imaginario.

f_1) $c_\infty = 0$, $\operatorname{sg}\lambda_1 = \operatorname{sg}\lambda_2 \neq \lambda_3$:

$$\mathcal{C} \equiv \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0. \tag{146}$$

Cono real.

Hay dos tipos de paraboloides:

a_{21}) $\operatorname{sg}\lambda_1 = \operatorname{sg}\lambda_2$:

$$\mathcal{C} \equiv x_3 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}. \tag{147}$$

Paraboloide elíptico.

a_{22}) $\operatorname{sg}\lambda_1 \neq \operatorname{sg}\lambda_2$:

$$\mathcal{C} \equiv x_3 = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}. \tag{148}$$

Paraboloide hiperbólico.

Existen tres tipos de cilindros no parabólicos:

b_{21}) $\operatorname{sg} c_\infty = \operatorname{sg}\lambda_1 = \operatorname{sg}\lambda_2$:

$$\mathcal{C} \equiv \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = -1. \tag{149}$$

Cilindro imaginario.

b_{22}) $\operatorname{sg} c_{oo} \neq \operatorname{sg} \lambda_1 = \operatorname{sg} \lambda_2$:

$$\mathcal{C} \equiv \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1. \tag{150}$$

Cilindro elíptico.

b_{23}) $\operatorname{sg} \lambda_1 \neq \operatorname{sg} \lambda_2$:

$$\mathcal{C} \equiv \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1. \tag{151}$$

Cilindro hiperbólico.

Los pares de planos no paralelos pueden ser:

c_{21}) *imaginarios*, si $\operatorname{sg} \lambda_1 = \operatorname{sg} \lambda_2$:

$$\mathcal{C} \equiv \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} i \right) \left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} i \right) = 0. \tag{152}$$

c_{22}) *reales*, si $\operatorname{sg} \lambda_1 \neq \operatorname{sg} \lambda_2$:

$$\mathcal{C} \equiv \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} \right) \left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} \right) = 0 \tag{153}$$

No existe más que un tipo de cilindro parabólico.

Los pares de planos paralelos pueden ser:

b_{31}) *imaginarios*, si $\operatorname{sg} c_{oo} = \operatorname{sg} \lambda_1$:

$$\mathcal{C} \equiv x_1^2 + a^2 = (x_1 + ai)(x_2 - ai) = 0. \tag{154}$$

b_{32}) *reales*, si $\operatorname{sg} c_{oo} \neq \operatorname{sg} \lambda_1$:

$$\mathcal{C} \equiv x_1^2 - a^2 = (x_1 + a)(x_2 - a) = 0.$$

b_{33}) *confundidos*, si $c_{oo} = 0$.

$$x_1^2 = 0. \tag{156}$$

20.3. Invariantes métricos de las cuádricas.

Llamaremos ecuación característica de la cuádrica $\mathcal{C}$ de ecuación (126) a

$$|A_o - \lambda I| = 0.$$

Tenemos que

$$C = SAS' = TGAG'T',$$

de donde, tomando determinantes,

$$|C| = |SAS'| = |S|\,|A|\,|S'| = |A| \tag{157}$$

puesto que

$$|S| = |S'| = \pm 1.$$

Por otra parte,

$$C_0 = G_0 A_0 G_0$$

pero $G_0^{-1} = G_0'$, ya que G_0 es ortogonal, luego

$$|C_0 - \lambda I| = |G_0 A_0 G_0' - \lambda G_0 I G_0'| = |G_0|\,|A_0 - \lambda I|\,|G_0'| = |A_0 - \lambda I|,$$

ya que $|G_0| = |G_0'| = \pm 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} &-\lambda^3 + (c_{11} + c_{22} + c_{23})\lambda^2 + (\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33})\lambda + C_{00} = \\ &= -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33})\lambda + A_{00}, \end{aligned}$$

donde γ_{ii} es el menor correspondiente al elemento c_{ii} de la diagonal principal de la submatriz C_0 y, análogamente, α_{ii} es el menor del elemento a_{ii} en A_0.

Identificando, obtenemos

$$c_{11} + c_{22} + c_{33} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \tag{158}$$

$$\gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} \tag{159}$$

$$C_{00} = A_{00} \tag{160}$$

A los cuatro números, $a_{11} + a_{22} + a_{33}$, $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$, A_{00} y $|A|$, que dependen exclusivamente de la cuádrica C y no del sistema métrico particular elegido para representarla, se les llama *invariantes métricos lineal, cuadrático, cúbico* y *cuártico* de la cuádrica. Los representaremos por I_1, I_2, I_3 e I_4, respectivamente.

Se demuestra que

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{01} & a_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & a_{02} \\ a_{02} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & a_{03} \\ a_{03} & a_{33} \end{vmatrix}$$

son también invariantes para los cilindros y pares de planos. Los denotaremos por I_3' e I_2', respectivamente.

EJEMPLO 1. Los invariantes métricos de la cuádrica

$$\mathcal{C} \equiv 2x_2 + 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$$

son

$$I_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad I_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6, \quad I_1 = 3.$$

CÁLCULO DE LAS ECUACIONES REDUCIDAS DE LAS CUÁDRICAS.

1. CUÁDRICAS CON CENTRO.

$$I_3 = A_{oo} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$
$$I_4 = |A| = c_{oo}\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

luego

$$c_{oo} = \frac{I_4}{I_3}\,\frac{|A|}{A_{oo}}$$

λ_1, λ_2 y λ_3 son las raíces de la ecuación

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda + I_3 = 0.$$

EJEMPLO 2. Sabiendo que $\mathcal{C}$ es una cuádrica con centro

$$\mathcal{C} \equiv -1 + x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 = 0,$$

su ecuación reducida será

$$c_{oo} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 13\lambda - 6 = (\lambda - 2)\left(\lambda - \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$$

$$-1 + 2x_1^2 + \frac{5+\sqrt{13}}{2}\,x_2^2 + \frac{5-\sqrt{13}}{2}\,x_3^2 = 0.$$

2. PARABOLOIDES.

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$I_2 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ii} = \lambda_1\lambda_2$$

$$I_4 = |A| = -c_{o3}^2\lambda_1\lambda_2$$

luego λ_1 y λ_2 serán las raíces de

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0 \quad \text{y} \quad c_{o3} = \sqrt{\frac{-|A|}{\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ii}}} = \sqrt{\frac{-I_4}{I_2}}$$

EJEMPLO 3. La ecuación reducida del paraboloide

$$1+2x_1-6x_3+2x_1^2+2x_1x_2-6x_1x_3+x_2^2-6x_2x_3+9x_3^2=0$$

será

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & 9 \end{pmatrix},$$

$$I_1=2+1+9=12$$

$$I_2=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=10$$

$$I_4=|A|=-9, \quad c_{o2}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\lambda^2-12\lambda+10=(\lambda-6+\sqrt{26})(\lambda-6-\sqrt{26})$$

$$\frac{6\sqrt{10}}{10}x_3+(6+\sqrt{26})x_1^2+(6-\sqrt{26})x_2^2=0.$$

3. CILINDROS NO PARABÓLICOS Y PARES DE PLANOS NO PARALELOS.

$$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2$$

$$I_2=\sum_{i\ 1}^{3}\alpha_{ii}=\lambda_1\lambda_2$$

luego λ_1 y λ_2 son las raíces de $\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$.

$$I_3'=A_{11}+A_{22}+A_{33}=c_{oo}\lambda_1\lambda_2$$

de donde

$$c_{oo}=\frac{I_3'}{I_2}.$$

4. CILINDRO PARABÓLICO.

$$I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1$$

$$I_3'=-d_{o2}^2\lambda_1$$

luego

$$d_{o2}=\sqrt{\frac{I_3'}{I_1}}.$$

5. PARES DE PLANOS PARALELOS O CONFUNDIDOS.

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \lambda_1$$

$$I_2' = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{01} & a_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & a_{02} \\ a_{02} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{00} & a_{03} \\ a_{03} & a_{33} \end{vmatrix} = c_{00}\lambda_1$$

de donde

$$c_{00} = \frac{I_2'}{I_1}.$$

EJERCICIOS

1. Sabiendo que

$$-12x_1 - 18x_2 - 12x_3 + 12x_1^2 + 12x_1x_2 + 6x_1x_3 + 9x_2^2 + 12x_2x_3 + 12x_3^2 = 0$$

es la ecuación de una cuádrica con centro, hállese su ecuación reducida.

2. Sabiendo que

$$1 + 2x_1 - 2x_3 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2 = 0$$

representa un paraboloide, hállese su ecuación reducida.

3. Sabiendo que

$$132 - 8x_1 + 96x_2 + 52x_3 + 4x_1^2 - 4x_1x_3 + 16x_2^2 - 16x_2x_3 + 5x_3^2 = 0$$

representa un cilindro no parabólico, hállese su ecuación reducida.

4. Sabiendo que

$$1 - x_1 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 0$$

representa un par de planos no paralelos, hállese su ecuación reducida.

20.4. Clasificación afín de las cuádricas.

En los elipsoides e hiperboloides y paraboloides $|A| \neq 0$, en las restantes cuádricas $|A| = 0$. A las primeras se les llama cuádricas *no degeneradas* y a las segundas *degeneradas*.

En los elipsoides e hiperboloides $A_{00} \neq 0$. Los elipsoides se caracterizan porque $\operatorname{sg}\lambda_1 = \operatorname{sg}\lambda_2 = \operatorname{sg}\lambda_3$, y los hiperboloides porque dos valores propios tienen igual signo y el tercero tiene signo distinto.

Utilizaremos un resultado de álgebra que dice: si las raíces de una ecuación

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

donde las a_i son reales, son todas reales, el valor absoluto de la diferencia entre el número de raíces positivas y raíces negativas es igual al valor absoluto entre el número de permanencias y variaciones de signo de la sucesión

$$-a_n, \quad +a_{n-1}, \ \ldots, \ (-1)^{n-1}a_n$$

formada por los coeficientes de la ecuación, cambiados alternativamente de signo.

La ecuación característica

$$|A_0 - \lambda I| = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I\lambda + I_3$$

tiene todas sus raíces reales, luego le es de aplicación el resultado anterior. Llamaremos *signatura* de la cuádrica y lo representaremos por s, al valor absoluto de la diferencia entre el número de permanencias y variaciones de signo de la sucesión

$$1, \ I_1, \ I_2, \ I_3$$

a la que llamaremos *sucesión secular.*

De acuerdo con esto, en los elipsoides $s=3$ y en los hiperboloides $s=1$.

Para distinguir entre elipsoide imaginario o real, obsérvese que por ser $\operatorname{sg} c_{00}=\operatorname{sg}\lambda_1=\operatorname{sg}\lambda_2=\operatorname{sg}\lambda_3$ en el primero y $\operatorname{sg} c_{00}\neq\operatorname{sg}\lambda_1=\operatorname{sg}\lambda_2=\operatorname{sg}\lambda_3$ en el segundo y, en ambos, $I_4=c_{00}\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, tiene que ser $I_4=|A|>0$ en el caso primero e $I_4=|A|<0$ en el segundo.

De manera análoga se razonaría para distinguir entre hiperboloide elíptico e hiperbólico.

En los paraboloides $A_{00}=0$.

En el paraboloide elíptico $\operatorname{sg}\lambda_1=\operatorname{sg}\lambda_2$ e $I_2=\lambda_1\lambda_2$, luego $I_2>0$, y en el hiperbólico, $\operatorname{sg}\lambda_1\neq\operatorname{sg}\lambda_2$ y, por tanto, $I_2<0$.

En las cónicas degeneradas, $I_3=A_{00}\neq 0$ para los conos e $I_3=A_{00}=0$ para los cilindros y pares de planos.

En el cono imaginario $\operatorname{sg}\lambda_1=\operatorname{sg}\lambda_2=\operatorname{sg}\lambda_3$, luego $s=3$, y en el real, $\operatorname{sg}\lambda_1=\operatorname{sg}\lambda_2\neq\operatorname{sg}\lambda_3$, de donde $s=1$.

Para los cilindros no parabólicos y pares de planos no paralelos, $I_2=\lambda_1\lambda_2\neq 0$, y para los cilindros parabólicos y pares de planos paralelos, $I_2=0$.

Los cilindros no parabólicos se diferencian de los pares de planos no paralelos en que para aquellos $I_3'=c_{00}\lambda_1\lambda_2\neq 0$ y para éstos $I_3'=0$.

En los cilindros imaginario y elíptico $I_2=\lambda_1\lambda_2>0$ y en el hiperbólico $I_2<0$. En el imaginario $\operatorname{sg} c_{00}=\operatorname{sg}\lambda_1=\operatorname{sg}\lambda_2=\operatorname{sg} c_{00}\lambda_1\lambda_2=\operatorname{sg}(\lambda_1+\lambda_2)\Longrightarrow\operatorname{sg} I_3'=\operatorname{sg} I_2$ y en el elíptico $\operatorname{sg} I_3'\neq\operatorname{sg} I_2$.

En los pares de planos no paralelos imaginarios $\operatorname{sg}\lambda_1=\operatorname{sg}\lambda_2$, luego $I_2=\lambda_1\lambda_2>0$, y en los reales, $I_2<0$.

Para los cilindros parabólicos $I_3'=-d_{02}\lambda_1\neq 0$ y para los pares de

planos paralelos $I_3'=0$. En los pares de planos imaginarios $\operatorname{sg} c_{\infty\infty} = \operatorname{sg} \lambda_1$, luego $I_2'=c_{\infty\infty}\lambda_1>0$, y en los reales $I_2'<0$ y en los confundidos $I_2'=0$.

La discusión anterior queda resumida en el siguiente cuadro:

- Cuádricas
  - $I_4=|A|\neq 0$ No degeneradas
    - $I_3=A_{\infty\infty}\neq 0$ elipsoides e hiperboloides
      - $s=3$ elipsoide
        - $I_4=|A|>0$ imaginario
        - $I_4=|A|<0$ real
      - $s=1$ hiperboloide
        - $I_4<0$ elíptico
        - $I_4>0$ real
    - $I_3=0$ paraboloides
      - $I_2>0$ elíptico
      - $I_2<0$ hiperbólico
  - $I_4=0$ degeneradas
    - $I_3\neq 0$ conos
      - $s=3$ imaginario
      - $s=1$ real
    - $I_3=0$ cilindros y pares de planos paralelos
      - $I_2\neq 0$ cilindros no parabólicos y pares de planos no paralelos
        - $I_3'\neq 0$ cilindros
          - $I_2>0$ imaginario y elíptico
            - $\operatorname{sg} I_3'=\operatorname{sg} I_1$ imaginario
            - $\operatorname{sg} I_3'\neq\operatorname{sg} I_1$ elíptico
          - $I_2<0$ Hiperbólico
        - $I_3'=0$ planos
          - $I_2>0$ imaginario
          - $I_2<0$ reales
      - $I_2=0$ cilindros parabólicos y planos paralelos
        - $I_3'\neq 0$ cilindro parabólico
        - $I_3'=0$ planos paralelos
          - $I_2'>0$ imaginarios
          - $I_2'<0$ reales
          - $I_2'=0$ confundidos

EJEMPLO 1. La cuádrica

$$2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=0$$

es un cono real, pues

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |A|=0$$

$A_{\infty}=2$, $I_1=0$, $I_2=-3$, luego el número de permanencias de la ecuación secular

$$1,\ 0,\ -3,\ 2$$

es 2, si se considera el 0 como positivo, y el de variaciones 1, luego $s=1$.

EJEMPLO 2. La cuádrica de ecuación

$$x_1^2-x_3^2+6x_1-7x_2+x_3-3=0$$

es un paraboloide hiperbólico. En efecto,

$$A=\begin{bmatrix}-3&3&-\frac{7}{2}&\frac{1}{2}\\3&1&0&0\\-\frac{7}{2}&0&0&0\\\frac{1}{2}&0&0&-1\end{bmatrix}, \quad |A|=\frac{49}{4}, \quad A_{\infty}=0, \quad I_2=-1.$$

EJERCICIOS

1. Clasifíquense y hállense las ecuaciones reducidas de las cuádricas:

a) $6x_1+6x_2-3x_3+5x_1^2-8x_1x_2+4x_1x_3+5x_2^2+4x_2x_3+8x_3^2=0.$
b) $-2x_2+4x_3+x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3-3x_3^2=0.$
c) $2x_2+3x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3=0.$
d) $2x_1-3x_3+2x_1^2+2x_1x_2-x_1x_3-3x_2x_3-3x_3^2=0.$
e) $2x_3+2x_1^2+3x_2^2+2x_1x_3+2x_3^2=0.$
f) $-3x_1+3x_2-6x_3+x_1^2-2x_1x_2+4x_1x_3+x_2^2-4x_2x_3+4x_3^2=0.$
g) $x_3+x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2^2+4x_2x_3+x_3^2=0.$
h) $1-2x_1-4x_2+6x_3+x_1^2+4x_1x_2+2x_2^2-x_3^2=0.$
i) $1+2x_2+2x_1^2-4x_1x_3+x_2^2+2x_3^2=0.$
j) $16-16x_2-12x_3+3x_2^2+6x_2x_3+3x_3^2=0.$
k) $4-8x_1+16x_2+20x_3+4x_1^2-4x_1x_3+4x_2^2-8x_2x_3+5x_3^2=0.$
l) $2x_1+3x_2+x_1^2+4x_1x_3-x_2^2-x_2x_3-2x_3^2=0.$

2. Discútase, según los valores de λ, la naturaleza de la cuádrica

$$4+2x_1+2x_3+x_1^2+2x_1x_2+(\lambda+1)x_2^2-2x_2x_3+\lambda x_3^2=0.$$

3. Hállense los valores de λ para los que la ecuación

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-1+2\lambda(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=0$$

representa una cuádrica degenerada. Clasifíquense dichas cuádricas degeneradas.

4. Hállense para qué valores de λ la ecuación

$$-6x_3+(6\lambda-15)x_1x_2+2x_1x_3+2\lambda x_2x_3+2x_3^2=0$$

representa:

a) paraboloides,
b) conos, y
c) pares de planos.

JAR'23

21

Cónicas (continuación)

Vamos a efectuar en este capítulo una ampliación del estudio de las cónicas que se inició en el capítulo 19. Para ello nos va a ser necesario un mínimo de conocimientos de geometría proyectiva, los cuales pasamos a desarrollar.

21.1. Coordenadas homogéneas en el plano.

Sea $\{O;\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2\}$ un sistema de referencia en el plano afín E_2. A todo punto $X(x_1, x_2)$ se le puede hacer corresponder un conjunto ordenado de tres números (X_o, X_1, X_2) siendo el primero no nulo, mediante las fórmulas

$$X_1 = x_1 X_o, \qquad X_2 = x_2 X_o \tag{161}$$

y estos tres números están determinados de manera única salvo un coeficiente de proporcionalidad.

Recíprocamente, tres números reales X_o, X_1, X_2, dados en un cierto orden, y tales que el primero sea no nulo, definen de manera única un punto X de E_2, cuyas coordenadas (x_1, x_2) satisfacen las relaciones (161).

A estos tres números X_o, X_1 y X_2 se les llama coordenadas homogéneas del punto X así determinado. La condición necesaria para que (X_o, X_1, X_2) e (Y_o, Y_1, Y_2) determinen el mismo punto es que

$$\frac{X_o}{Y_o} = \frac{X_1}{Y_1} = \frac{X_2}{Y_2}.$$

Puntos del infinito.

Las coordenadas homogéneas nos van a permitir añadir al conjunto de los puntos del plano otros puntos ideales que nos serán de gran utilidad.

Sea la recta r de ecuación vectorial

$$\mathbf{x}=\mathbf{p}+\lambda\mathbf{v},$$

donde, como ya sabemos, $\mathbf{p}$ representa el vector de posición de un punto P de la recta y $\mathbf{v}$ un vector de dirección de la misma. Si en la ecuación anterior hacemos tender λ hacia infinito, una al menos de las coordenadas del punto genérico de la recta tiende a infinito. Sin embargo, si se asocia a este punto las coordenadas homogéneas

$$X_0=\frac{1}{\lambda},\qquad X_1=\frac{p_1}{\lambda}+v_1,\qquad X_2=\frac{p_2}{\lambda}+v_2,$$

éstas permanecen finitas al tender λ a infinito y tienen por límite: 0, v_1, v_2, respectivamente. Diremos, por definición, que $(0, v_1, v_2)$ son las coordenadas homogéneas del *punto del infinito* de r.

Entonces llamaremos punto del infinito del plano afín E_2 a todo punto cuya primera coordenada homogénea sea nula.

Dos rectas paralelas tienen vectores de dirección proporcionales, luego las coordenadas de sus puntos del infinito también lo serán, por lo que representarán el mismo punto. En lugar de decir que dos rectas son paralelas o que tienen la misma dirección, ahora podemos decir que tienen el mismo punto del infinito.

El conjunto de los puntos del infinito del plano está caracterizado por la ecuación

$$X_0=0.$$

A este conjunto le llamaremos recta del infinito del plano E_2.

A los puntos del infinito les llamaremos *puntos impropios* y a los ordinarios *puntos propios.*

Ecuación homogénea de la recta.

Sea $r\equiv ax_1+bx_2+c=0$, sustituyendo en esta ecuación x_1 y x_2 despejadas de las relaciones (161) en función de X_0, X_1, X_2 obtenemos

$$cX_0+aX_1+bX_2=0, \tag{162}$$

que es la ecuación homogénea de r.

Si la recta r viene determinada por los puntos P (P_0, P_1, P_2) y Q (Q_0, Q_1, Q_2)

$$\begin{vmatrix} r\equiv AX_0+BX_1+CX_2=0\\ AP_0+BP_1+CP_2=0\\ AQ_0+BQ_1+CQ_2=0\end{vmatrix}$$

pero para que el sistema anterior, cuyas incógnitas son A, B y C, sea compatible es necesario que

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ P_0 & P_1 & P_2 \\ Q_0 & Q_1 & Q_2 \end{vmatrix} = 0$$

luego, la primera fila es combinación lineal de las otras dos,

$$\begin{aligned} X_0 &= \lambda P_0 + \mu Q_0 \\ X_1 &= \lambda P_1 + \mu Q_1 \\ X_2 &= \lambda P_2 + \mu Q_2 \end{aligned} \tag{163}$$

que son las *ecuaciones paramétricas homogéneas* de r.

De ahora en adelante denotaremos con la misma letra a un punto y a la matriz de sus coordenadas homogéneas. Con este convenio

$$r \equiv X = \lambda P + \mu Q. \tag{164}$$

Si la recta viene dada en la forma (162) hallaremos su punto del infinito resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} cX_0 + aX_1 + bX_2 &= 0 \\ X_0 \qquad\qquad &= 0 \end{aligned}$$

luego dicho punto es el $(0, b, -a)$.

Si r viene en la forma (163). Calcularemos λ y μ haciendo $X_0 = 0$ en la primera ecuación y llevando estos valores a la segunda y tercera.

EJEMPLO 1. La recta de ecuación $2x_1 - 3x_2 + 4 = 0$ es, en coordenadas homogéneas, $4X_0 + 2X_1 - 3X_2 = 0$, y su punto del infinito el $(0, 3, 2)$.

EJEMPLO 2. Las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por los puntos P $(1, 2, 4)$ y Q $(4, 3, -2)$ son

$$\begin{aligned} X_0 &= \lambda + 4\mu \\ X_1 &= 2\lambda + 3\mu \\ X_2 &= 4\lambda - 2\mu, \end{aligned}$$

para $X_0 = 0$, $\dfrac{\lambda}{\mu} = -4$, luego el punto del infinito es el $(0, -5, -18)$.

PUNTOS IMAGINARIOS. RECTAS ISÓTROPAS. PUNTOS CÍCLICOS.

Si consideramos también como puntos del plano los representados por coordenadas homogéneas (X_0, X_1, X_2), en las que al menos una de ella es imaginaria, el plano se compondrá de puntos propios,

reales o imaginarios, y puntos impropios, que también podrán ser reales o imaginarios.

A los puntos imaginarios no les son de aplicación todos los resultados que son ciertos para los puntos reales. Por ejemplo, la distancia entre los puntos P y Q definida en el plano euclídeo respecto a un sistema métrico por $d(P, Q) = \sqrt{(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2}$ puede ser nula para dos puntos imaginarios distintos, e incluso puede no estar definida.

EJEMPLO 3. $P\ (1+i,\ i)$, $Q\ (i,\ 0)$:

$$d(P, Q) = \sqrt{1^2+i^2}=0.$$

Para que dos puntos $P\ (p_1,\ p_2)$ y $Q\ (q_1,\ q_2)$ sean tales que $d(P, Q)=0$, es necesario que $(p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2=0$, pero

$$\mathbf{v}=(p_1-q_1,\ p_2-q_2)$$

es un vector de dirección de la recta PQ. El vector

$$\left(1,\ \frac{p_2-q_2}{p_1-q_1}\right)$$

tiene también esta dirección y se debe cumplir

$$1+\left(\frac{p_2-q_2}{p_1-q_1}\right)^2=0$$

luego

$$\frac{p_2-q_2}{p_1-q_1}=\pm i.$$

Es decir, $(1,\ \pm i)$ debe ser un vector de dirección de la recta determinada por los puntos P, Q tales que $d(P, Q)=0$. A las direcciones caracterizadas por los vectores $(1, i)$ o $(1, -i)$ se les llama *direcciones isótropas* y a las rectas que tienen dirección isótropa se les denomina *rectas isótropas.* Por cada punto $R\ (r_1,\ r_2)$ del plano pasan dos rectas isótropas

$$x_1-r_1=\pm i(x_2-r_2),$$

su ecuación conjunta es

$$(x_1-r_1)^2+(x_2-r_2)^2=0. \tag{165}$$

Obsérvese que toda recta isótropa es perpendicular a sí misma. En

efecto, respecto a su sistema métrico, la pendiente de una recta isótropa es $\pm i$ y

$$(\pm i)^2 = -1.$$

que es la condición de perpendicularidad.

La ecuación (165) escrita en forma homogénea es

$$(X_1 r_0 - X_0 r_1)^2 + (X_2 r_0 - X_0 r_2)^2 = 0,$$

cortando por la recta del infinito $X_0 = 0$ esta cónica imaginaria, obtenemos sus puntos del infinito, éstos son

$$(0,\ 1,\ i) \quad \text{y} \quad (0,\ 1,\ -i)$$

a los cuales se les llama *puntos cíclicos* del plano.

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que toda hipérbola tiene dos puntos impropios reales distintos, que toda parábola tiene dos puntos impropios confundidos y que toda elipse tiene dos puntos impropios imaginarios.

2. Demuéstrese que todas las circunferencias del plano pasan por los puntos cíclicos de éste.

3. Hállese la ecuación homogénea de la recta que pasa por los puntos $P\ (0,\ 1,\ -3)$ y $Q\ (1,\ -1,\ 2)$.

21.2. Coordenadas en la recta. Coordenadas homogéneas. Razón simple de tres puntos. Razón doble de cuatro puntos.

Sea r una recta orientada, O un punto fijo de la misma y $\mathbf{u}$ un vector libre no nulo que tenga su misma dirección. Llamaremos sistema de referencia en la recta al conjunto $\{O;\ \mathbf{u}\}$. Todo punto X de r determina un vector libre $\{\overrightarrow{OX}\}$ y $\{\overrightarrow{OX}\} = x\mathbf{u}$, donde x es un número real. Recíprocamente, dado un número real x existe un único vector libre $\mathbf{y} = x\mathbf{u}$ y éste tiene un único representante de clase $\overrightarrow{OX}$ con origen en O. Por este procedimiento hemos establecido una correspondencia biunívoca entre los puntos X de la recta r y los números reales x. Al número que mediante esta correspondencia se le asigna al punto X se le llama abscisa de X respecto al sistema de referencia $\{O;\ \mathbf{u}\}$.

Si definimos la pareja de números reales (X_o, X_1) mediante

$$X_1 = xX_o, \qquad X_o \neq 0, \tag{166}$$

resulta que a todo punto de la recta le corresponde de manera única (salvo un factor de proporcionalidad) una pareja ordenada de números. Así toda pareja ordenada de números reales (X_o, X_1) con $X_o \neq 0$ representa un único punto de la recta y dos parejas (X_o, X_1) e (Y_o, Y_1) representarán el mismo punto cuando

$$\frac{X_o}{Y_o} = \frac{X_1}{Y_1}.$$

La pareja (0, 1) y todas sus proporcionales (O, X_1) no representarían ningún punto. Convendremos en que representan un nuevo punto de la recta al que llamaremos *punto del infinito.*

Dados dos sistemas de referencia $\{O;\ \mathbf{u}\}$ y $\{\bar{O};\ \bar{\mathbf{u}}\}$ en la recta r, si x y $\bar{x}$ son las abscisas de un punto X respecto al primer y segundo sistema respectivamente, y si la abscisa de $\bar{O}$ respecto a $\{O;\ \mathbf{u}\}$ es a y $\bar{\mathbf{u}} = b\mathbf{u}$, tenemos

$$\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{O\bar{O}}\} + \{\overrightarrow{\bar{O}X}\}$$

luego

$$x\mathbf{u} = a\mathbf{u} + \bar{x}\bar{\mathbf{u}} = a\mathbf{u} + bx\mathbf{u},$$

de donde

$$x = a + bx,$$

que es la fórmula de cambio de sistema de referencia en r.

Razón simple de tres puntos.

Dados tres puntos A, B y C sobre una recta orientada r, se llama razón simple de los mismos a

$$(A\,B\,C) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}},$$

donde $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son longitudes de segmentos orientadas.

Si a, b y c son las abscisas de A, B y C respecto a un sistema $\{O;\ \mathbf{u}\}$, tenemos que

$$(A\,B\,C) = \frac{b-a}{c-a}. \tag{167}$$

Evidentemente la razón simple de tres puntos no depende del sistema de referencia elegido.

RAZÓN DOBLE DE CUATRO PUNTOS.

Se llama razón doble de cuatro puntos A, B, C y D de una recta r al cociente entre la razón simple del primero, tercero y cuarto y la razón simple del segundo, tercero y cuarto

$$(A\,B\,C\,D)=\frac{(A\,C\,D)}{(B\,C\,D)}$$

y respecto a un sistema de referencia $\{O;\ \mathbf{u}\}$

$$(168)\qquad (A\,B\,C\,D)=\frac{c-a}{d-a}:\frac{c-b}{d-b}$$

y empleando coordenadas homogéneas

$$(168')\qquad (A\,B\,C\,D)=\frac{\dfrac{C_1}{C_0}-\dfrac{A_1}{A_0}}{\dfrac{D_1}{D_0}-\dfrac{A_1}{A_0}}:\frac{\dfrac{C_1}{C_0}-\dfrac{B_1}{B_0}}{\dfrac{D_1}{D_0}-\dfrac{B_1}{B_0}}=$$

$$=\frac{A_0C_1-A_1C_0}{A_0D_1-A_1D_0}:\frac{B_0C_1-B_1C_0}{B_0D_1-B_1D_0}=$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}A_0 & A_1\\ C_0 & C_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_0 & A_1\\ D_0 & D_1\end{vmatrix}}:\frac{\begin{vmatrix}B_0 & B_1\\ C_0 & C_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}B_0 & B_1\\ D_0 & D_1\end{vmatrix}}.$$

Obsérvese que la razón doble $(A\,B\,C\,D)$ no está definida si

$$A=D \quad \text{o} \quad B=C.$$

La razón doble de cuatro puntos es independiente del sistema de referencia por serlo la razón simple.

Si cuatro puntos A, B, C y D de r son tales que su razón doble vale -1 se dice que forman *cuaterna armónica*.

También se dice que los puntos C y D separan armónicamente a los A y B, o que el punto C es el conjugado armónico del D respecto a A y B.

El conjugado armónico del punto del infinito I de r respecto a A y B es el punto medio del segmento AB. En efecto,

$$-1=(A\,B\,C\,I)=\frac{\begin{vmatrix}A_0 & A_1\\ C_0 & C_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_0 & A_1\\ 0 & 1\end{vmatrix}}\cdot\frac{\begin{vmatrix}B_0 & B_1\\ 0 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}B_0 & B_1\\ C_0 & C_1\end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{(A_0C_1-A_1C_0)B_0}{A_0(B_0C_1-C_1B_0)}=\frac{c-a}{c-b},$$

de donde

$$c=\frac{b-a}{2}.$$

Sea la recta

$$r\equiv\begin{cases}X_0=\lambda P_0+\mu Q_0\\ X_1=\lambda P_1+\mu Q_1\\ X_2=\lambda P_2+\mu Q_2\end{cases}$$

Si los puntos P y Q son propios, podemos suponer que $P_0=Q_0=1$, en cuyo caso

$$x_1=\frac{X_1}{X_0}=\frac{\lambda p_1+\mu q_1}{\lambda+\mu},\qquad x_2=\frac{\lambda p_2+\mu q_2}{\lambda+\mu}$$

o, con vectores de posición,

$$\mathbf{x}=\frac{\lambda\mathbf{p}+\mu\mathbf{q}}{\lambda+\mu},$$

pero entonces, según se vio en el Ej. 7 de [7.1],

$$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\overline{QX}}{\overline{XP}}=-(X\,Q\,P)$$

Entonces, si

$$A=\alpha_0P+\alpha_1Q\quad\text{y}\quad B=\beta_0P+\beta_1Q,$$

tenemos

$$(A\,B\,P\,Q)=\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right):\left(-\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)=\frac{\alpha_1\beta_0}{\alpha_0\beta_1}$$

Si A, B, P y Q forman cuaterna armónica

$$\frac{\alpha_1\beta_0}{\alpha_0\beta_1}=-1$$

de donde

$$\alpha_1\beta_0+\alpha_0\beta_1=0.$$

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que si $(A\,B\,C)=\lambda$:

a) $(C\,B\,A)=1-\lambda$,

b) $(C\,A\,B)=\dfrac{1}{1-\lambda}$,

c) $(B\,A\,C)=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$.

2. Demuéstrese que si $(A\,B\,C\,D)=\lambda$:

a) $(A\,B\,C\,D)=(B\,A\,D\,C)=(C\,D\,A\,B)=(D\,C\,B\,A)$,

b) $(A\,B\,D\,C)=\dfrac{1}{\lambda}$,

c) $(A\,C\,B\,D)=1-\lambda$,

d) $(A\,C\,D\,B)=\dfrac{1}{1-\lambda}$,

e) $(A\,D\,B\,C)=1-\dfrac{1}{\lambda}$,

f) $(A\,D\,C\,B)=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$.

3. Demuéstrese que si A, B, C y D forman cuaterna armónica y los cuatro son distintos:

$$(A\,B\,C\,D)=(A\,B\,D\,C).$$

4. Una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$ representa dos puntos de la recta que pueden ser: reales distintos, reales confundidos o imaginarios conjugados. Calcúlese $(A\,B\,C\,D)$, siendo A y B los puntos representados por $x^2-5x+6=0$ y C y D los representados por $x^2+x-20=0$.

5. Hállense λ y μ para que los puntos representados por $x^2+\lambda x+\mu=0$ estén armónicamente separados de los representados por $x^2-2x-15=0$ y $x^2-3x+2=0$.

21.3. Proyectividad en las figuras de primera categoría.

A la serie rectilínea, al haz plano de rectas y al haz de planos se les denomina *figuras de primera categoría.*

Si en el haz plano de rectas

$$\lambda_0(ax_1+bx_2+c)+\lambda_1(a'x_1+b'x_2+c)=0$$

determinado por las rectas

$$r_1\equiv ax_1+bx_2+c=0 \quad \text{y} \quad r_2\equiv a'x_1+b'x_2+c'=0$$

consideramos a (λ_0, λ_1) como coordenadas homogéneas de las rectas del haz respecto a la base $\{r_1, r_2\}$, y si (α_0, α_1), (β_0, β_1), (γ_0, γ_1) y (δ_0, δ_1) son las coordenadas homogéneas de las rectas s_1, s_2, s_3 y s_4 del haz, podemos definir la razón doble $(s_1 s_2 s_3 s_4)$ de dichas cuatro rectas, mediante la igualdad

$$(s_1\, s_2\, s_3\, s_4) = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \gamma_0 & \gamma_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \delta_0 & \delta_1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ \gamma_0 & \gamma_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_0 & \beta_1 \\ \delta_0 & \delta_1 \end{vmatrix}}.$$

Se demuestra que el valor de la razón doble de cuatro rectas no depende de las dos rectas del haz elegidas como base (véase Ej. 1).

Se dirá que cuatro rectas del haz s_1, s_2, s_3 y s_4 forman cuaterna armónica, cuando

$$(s_1\, s_2\, s_3\, s_4) = -1.$$

De manera análoga se podría definir la razón doble de cuatro planos de un haz y cuaterna armónica de cuatro planos.

Dadas dos figuras de primera categoría (de distinta o igual clase y en este caso distintas o confundidas), llamaremos *proyectividad* entre dichas figuras a toda aplicación biyectiva de una en otra que conserve las razones dobles.

Ecuaciones de la proyectividad.

Supongamos que tenemos una proyectividad entre dos figuras de primera categoría. Sean (a_0, a_1), (b_0, b_1) y (c_0, c_1) las coordenadas homogéneas de tres elementos de la primera figura y (a_0', a_1'), (b_0', b_1') y (c_0', c_1') las de sus homólogos en la segunda; designemos con (x_0, x_1) las coordenadas del elemento genérico de la primera figura y con (y_0, y_1) las de su homólogo en la segunda. Tiene que verificarse

$$(A\, B\, C\, X) = (A'\, B'\, C'\, X'),$$

luego

$$\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ x_0 & x_1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ x_0 & x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_0' & a_1' \\ c_0' & c_1' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0' & a_1' \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} b_0' & b_1' \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_0' & b_1' \\ c_0' & c_1' \end{vmatrix}}$$

de donde

$$p_{00}x_0y_0 + p_{01}x_0y_1 + p_{10}x_1y_0 + p_{11}x_1y_1 = 0 \tag{169}$$

y que en forma no homogénea podría escribirse

$$p_{00}+p_{01}y+p_{10}x+p_{11}xy=0 \tag{169'}$$

después de haber hecho $\frac{x_1}{x_0}=x$ e $\frac{y_1}{y_0}=y$.

Despejando y, tendríamos

$$y=\frac{mx+n}{px+q} \tag{170}$$

donde hemos hecho $m=-p_{10}$, $n=-p_{00}$, $p=p_{11}$ y $q=p_{01}$.

En (170) se tiene que verificar $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} \neq 0$, pues en caso contrario, como (170) puede ponerse en la forma

$$y=\frac{n}{q}\cdot\frac{\frac{m}{n}x+1}{\frac{p}{q}x+1}$$

al ser

$$\frac{m}{n}=\frac{p}{q},$$

resultaría que todos los elementos de la primera figura se aplicarían en el de abscisa $\frac{n}{q}$ de la segunda y la aplicación no sería biyectiva.

Recíprocamente, toda ecuación de la forma (170) con la condición $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} \neq 0$, es la de una proyectividad si se conviene en que los homólogos de los elementos de abscisa $-\frac{q}{p}$ y el del infinito de la primera figura son, respectivamente, el del infinito y el de abscisa $\frac{n}{q}$ de la segunda. En efecto, en estas condiciones la aplicación definida por dicha ecuación es biyectiva. Además conserva las razones dobles, pues si

$$y_i=\frac{mx_i+n}{px_i+q} \qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

$$(Y_1\ Y_2\ Y_3\ Y_4)=(X_1\ X_2\ X_3\ X_4)$$

La demostración es por sustitución y cancelación del número no nulo $mq-np$.

En resumen, las ecuaciones (169) y (170) son las de una proyectividad entre dos formas de primera categoría. A la (169) se le llama ecuación *bilineal* de la proyectividad. Puede escribirse en forma matricial de la siguiente manera:

$$(171) \qquad XPY'=0 \quad \text{con} \quad P=\begin{pmatrix} p_{\infty} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$$

en virtud de lo visto anteriormente $|P| \neq 0$.

Incidentalmente hemos demostrado que *una proyectividad está determinada por tres parejas distintas de elementos homólogos.*

Se llaman *puntos límites* de una proyectividad entre figuras de primera categoría a los homólogos de los elementos del infinito de cada figura.

Si la ecuación de la proyectividad es

$$p_{\infty}x_0y_0+p_{01}x_0y_1+p_{10}x_1y_0+p_{11}x_1y_1=0,$$

al punto (0, 1) de la primera figura corresponde el $(p_{11}, -p_{10})$ de la segunda y al (0, 1) de la segunda el $(p_{11}, -p_{10})$ de la primera, luego

$$I'_{\infty}\ (p_{11}, -p_{10}) \quad \text{e} \quad I_{\infty}\ (p_{11}, -p_{01})$$

son los puntos límites de dicha proyectividad.

Sea

$$p_{\infty}x_0x_0'+p_{01}x_0x_1'+p_{10}x_1x_0'+p_{11}x_1x_1'=0$$

la ecuación de una proyectividad entre dos figuras de primera categoría confundidas. Llamaremos elementos *dobles* o *invariantes* respecto a la proyectividad a los que son homólogos de ellos mismos en dicha proyectividad. Si suponemos que los elementos de ambas figuras están referidos a los mismos sistemas de referencia, si un elemento $X\ (x_0, x_1)$ es doble se tiene $x_0'=\lambda x_0$ y $x_1'=\lambda x_1$, luego la ecuación

$$p_{\infty}x_0^2+(p_{01}+p_{10})x_0x_1+p_{11}x_1^2=0$$

nos da las coordenadas de los elementos dobles.

Puede ocurrir que

$$(p_{01}+p_{10})^2-4p_{\infty}p_{11} \gtreqless 0.$$

En el primer caso (dos puntos dobles reales distintos) se dice que la proyectividad es *hiperbólica;* en el segundo (un único punto doble real contado dos veces), la proyectividad se llama *parabólica* y en el tercero *elíptica* (dos puntos dobles imaginarios conjugados).

EJEMPLO 1. La proyectividad

$$-6x_0x_0'+2x_0x_1'+7x_1x_0'-3x_1x_1'=0$$

es hiperbólica, pues

$$(2+7)^2-4(-6)(-3)=9>0,$$

y los puntos dobles son (1, 2) y (1, 1).

Si los elementos dobles de la proyectividad son D_1 y D_2 y X, X^* son dos elementos cualesquiera y X', $X^{*\prime}$ son sus respectivos homólogos, tenemos:

$$(X\,X^*\,D_1\,D_2)=(X'\,X^{*\prime}\,D_1\,D_2),$$

es decir

$$\frac{(X\ \ D_1\,D_2)}{(X^*\,D_1\,D_2)}=\frac{(X'\ \ D_1\,D_2)}{(X^{*\prime}\,D_1\,D_2)},$$

de donde

$$\frac{(X\ \ D_1\,D_2)}{(X'\,D_1\,D_2)}=\frac{(X^*\ \ D_1\,D_2)}{(X^{*\prime}\,D_1\,D_2)},$$

luego

$$(X\,X'\,D_1\,D_2)=(X^*\,X^{*\prime}\,D_1\,D_2)$$

lo que nos dice que:

En dos figuras de primera categoría proyectivas superpuestas la razón doble de dos elementos homólogos y de los elementos dobles es constante. A esta constante se le llama *característica* de la proyectividad.

El punto medio del segmento determinado por los puntos dobles es

$$-\frac{p_{01}+p_{10}}{2p_{11}}$$

y el del determinado por los puntos límites

$$\frac{\dfrac{-p_{01}}{p_{11}}+\dfrac{-p_{10}}{p_{11}}}{2}=-\frac{p_{01}+p_{10}}{2p_{11}},$$

luego *en dos figuras de primera categoría proyectivas superpuestas, los dos puntos límites equidistan respectivamente de los dos puntos dobles.*

EJEMPLO 2. Los puntos límites de la proyectividad del ejemplo 1 son los (3, 2) y (3, 7).

La característica es

$$\frac{\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix}3 & 7\\ 1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 7\\ 1 & 1\end{vmatrix}} = \frac{(-1)(6-7)}{(-1)(3-7)} = \frac{1}{4}.$$

INVOLUCIÓN ENTRE FIGURAS DE PRIMERA CATEGORÍA SUPERPUESTAS.

Sea φ una proyectividad entre dos figuras superpuestas. En general si $\varphi(X) = Y$, $\varphi(Y) \neq X$. Si una proyectividad entre figuras de primera categoría superpuestas es tal que $\varphi[\varphi(X)] = \varphi^2(X) = X$, se le llama *involución.*

Si

$$p_{oo}x_o x_o' + p_{o1}x_o x_1' + p_{1o}x_1 x_o' + p_{11}x_1 x_1' = 0,$$

es la ecuación de una involución, tenemos que

$$p_{oo}x_o' x_o + p_{o1}x_o' x_1 + p_{1o}x_1' x_o + p_{11}x_1' x_1 = 0,$$

y restando ordenadamente ambas igualdades

$$(p_{o1} - p_{1o})(x_o x_1' - x_1 x_o') = 0$$

y como esto es cierto para todo valor de x_o, x_1, x_o', x_1',

$$p_{o1} = p_{1o}$$

luego la ecuación de una involución es de la forma

$$p_{oo}x_o x_o' + 2p_{o1}(x_o x_1' + x_1 x_o') + p_{11}x_1 x_1' = 0.$$

En la involución los elementos de la figura aparecen apareados. A cada pareja de elementos homólogos se les llama *conjugados.*

Al único punto límite de la involución $(p_{11}, -p_{o1})$ se le llama *centro* de la involución.

Una involución no puede ser parabólica, pues si

$$p_{o1}^2 - p_{oo}p_{11} = 0,$$

la proyectividad sería degenerada.

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que la razón doble de cuatro rectas no depende de las dos rectas utilizadas para determinar el haz.

2. Demuéstrese que una involución está determinada por dos parejas de elementos conjugados.

3. Dada la proyectividad entre dos series superpuestas de ecuación

$$3x_0x_0' + 2x_0x_1' - x_1x_0' - 4x_1x_1' = 0$$

hállense:

a) los puntos dobles,
b) los puntos límites,
c) característica de la proyectividad.

4. Hállese la ecuación de la proyectividad entre dos series superpuestas tal que los homólogos de los puntos (0, 1), (1, 1), (2, −1), son los (1, 1), (1, 0) y (1, −1), respectivamente. Clasifíquese y hállense los puntos dobles.

5. Demuéstrese que en toda involución entre dos haces de rectas superpuestas existe un par de conjugadas perpendiculares. Se les llama rayos principales.

6. En dos haces de rectas superpuestas se define una proyectividad de la siguiente forma:

A la recta r se le hace corresponder la r' que forma con ella ángulo de 45°, a la s que es la perpendicular a r se le hace corresponder ésta y a la r' la s. Hállese la ecuación de dicha proyectividad.

7. Demuéstrese que la correspondencia que asocia a cada recta de un haz su perpendicular en dicho haz es una involución. ¿Cuáles son las rectas dobles de esta involución?

21.4. Posición relativa de una recta y una cónica.

La ecuación de una cónica $\mathcal{C}$ en forma homogénea es

$$a_{00}X_0^2 + 2a_{01}X_0X_1 + 2a_{02}X_0X_2 + a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 = 0$$

o, en forma matricial,

$$XAX' = 0,$$

donde ahora X es la matriz de coordenadas homogéneas $(X_0\ X_1\ X_2)$.

A las expresiones

$$f_{X_0} = a_{00}X_0 + a_{01}X_1 + a_{02}X_2$$
$$f_{X_1} = a_{01}X_0 + a_{11}X_1 + a_{12}X_2$$
$$f_{X_2} = a_{02}X_0 + a_{12}X_1 + a_{22}X_2$$

les llamaremos *formas lineales* asociadas a la cónica. Obsérvese que

$$\mathcal{C} \equiv f_{X_0}X_0 + f_{X_1}X_1 + f_{X_2}X_2 = 0.$$

Sea la cónica $\mathcal{C}$ de ecuación matricial

$$XAX' = 0 \tag{171}$$

y la recta r determinada por los puntos P y Q

$$r \equiv X = \lambda P + \mu Q. \tag{172}$$

El problema geométrico de hallar los puntos comunes a r y $\mathcal{C}$ es equivalente al problema algebraico de resolver el sistema formado por las ecuaciones (171) y (172). Pero este sistema es equivalente al

$$\begin{cases} (\lambda P + \mu Q)A(\lambda P + \mu Q)' = 0 \\ X = \lambda P + \mu Q \end{cases}$$

y haciendo operaciones

$$\begin{cases} (PAP')\lambda^2 + 2(PAQ')\lambda\mu + (QAQ')\mu^2 = 0 \\ X = \lambda P + \mu Q. \end{cases} \tag{173}$$

Para hallar los puntos comunes resolveremos la ecuación homogénea de segundo grado en λ y μ y los valores obtenidos los llevaremos a la segunda ecuación, la cual nos dará las coordenadas homogéneas de dichos puntos.

Pueden ocurrir los siguientes casos:

1. Que la ecuación de segundo grado sea idénticamente nula, es decir, que $PAP' = 0$, $PAQ' = 0$ y $QAQ' = 0$, en cuyo caso cualquier pareja (λ, μ) de números reales sería solución de (173), luego todo punto de r pertenecería a $\mathcal{C}$ o, lo que es lo mismo, la recta formaría parte de la cónica.

2. Que el discriminante de la ecuación de segundo grado sea positivo, lo que equivale a que

$$(PAQ')^2 - (PAP')(QAQ') > 0,$$

en cuyo caso existen dos soluciones reales y, por tanto, existen dos puntos reales distintos comunes a la recta y a la cónica. Se dice que la recta es *secante* a la cónica.

3. $$(PAQ')^2-(PAP')(QAQ')=0,$$

existen dos puntos confundidos comunes a r y $\mathcal{C}$. Se dice que r es *tangente* a $\mathcal{C}$.

4. $$(PAQ')^2-(PAP')(QAQ')<0,$$

las soluciones de la ecuación son imaginarias y los puntos de intersección de r y $\mathcal{C}$ son dos imaginarios conjugados. Se dice que la recta es *exterior* a la cónica.

EJEMPLO 1. Para hallar los puntos comunes a la cónica

$$-10X_0^2-8X_0X_1-3X_0X_2+2X_1^2+3X_1X_2+X_2^2=0$$

y a la recta determinada por los puntos P (0, 1, 3) y Q (1, 0, -7) calculamos

$$PAP'=20, \quad PAQ'=40 \quad \text{y} \quad QAQ'=60$$

y la ecuación

$$20\lambda^2+80\lambda\mu+60\mu^2=0$$

nos da

$$\frac{\lambda}{\mu}=\begin{matrix}-3\\-1\end{matrix}.$$

Los valores $\lambda=3$, $\mu=1$ llevados a las ecuaciones

$$X=\lambda(0,\ 1,\ 3)+\mu(1,\ 0,\ -7)$$

dan

$$\bar{X}=(1,\ 3,\ 2)$$

y los valores $\lambda=1$, $\mu=1$ dan

$$\bar{\bar{X}}=(1,\ 1,\ -4).$$

RECTA TANGENTE A UNA CÓNICA POR UN PUNTO DE ÉSTA.

Supongamos que $P\in\mathcal{C}$. Entonces $PAP'=0$ y la primera ecuación (173) se reduce a

(174) $$2(PAQ')\lambda\mu+(QAQ')\mu^2=0$$

que tiene una raíz $\lambda=1$, $\mu=0$, la cual da el punto de intersección P,

cosa que ya sabíamos. El otro punto de intersección se obtendrá llevando a la segunda ecuación de (173) la otra raíz de (174):

$$\frac{\mu}{\lambda}=-\frac{2(PAQ')}{QAQ'}.$$

Si la recta r fuera tangente a $\mathcal{C}$, el segundo punto de intersección sería nuevamente P y entonces

$$\frac{2(PAQ')}{QAQ'}=0,$$

de donde $PAQ'=0$ es la condición que deben cumplir las matrices de coordenadas del punto P de tangencia y un segundo punto que junto con el P determine a la tangente. Pero este segundo punto puede ser cualquiera de r (distinto del P), luego la ecuación de la recta tangente a la cónica en el punto P será

$$PAX'=0, \tag{175}$$

la cual se puede escribir de estas dos maneras:

$$f_{X_0}P_0+f_{X_1}P_1+f_{X_2}P_2=0$$

o

$$f_{P_0}X_0+f_{P_1}X_1+f_{P_2}X_2=0.$$

EJEMPLO 2. La tangente a la cónica

$$-4X_0^2-2X_0X_1+3X_1^2+4X_1X_2+X_2^2=0$$

en el punto (1, 0, 2) es

$$((-4)\cdot 1+(-1)\cdot 0+0\cdot 2)X_0+((-1)\cdot 1+3\cdot 0+2\cdot 2)X_1+$$
$$+(0\cdot 1+2\cdot 0+1\cdot 2)X_2=-4X_0+3X_1+2X_2=0.$$

ECUACIÓN CONJUNTA DEL PAR DE TANGENTES A UNA CÓNICA POR UN PUNTO P.

Sea ahora P un punto cualquiera del plano. Para que la recta $X=\lambda P+\mu Q$ tenga dos puntos comunes con la cónica $\mathcal{C}$ confundidos, es necesario que

$$(PAQ')^2-(PAP')(QAQ')=0$$

y entonces la recta será tangente a la cónica. Pero puesto que la rec-

ta puede determinarse por el punto P y por cualquier otro punto de ella, entonces

$$(PAX')^2-(PAP')(XAX')=0 \tag{176}$$

representará al conjunto de puntos de las tangentes trazadas a la cónica por el punto P. La ecuación anterior es la de una cónica, que será degenerada, ya que ha de contener dos rectas. Según que dicha cónica represente a dos rectas reales distintas, reales confundidas o imaginarias conjugadas, se dice que el punto P es *exterior, está en,* o es *interior* a la cónica $\mathcal{C}$.

EJEMPLO 3. La ecuación conjunta del par de tangentes a la cónica

$$\mathcal{C}\equiv X_0^2+2X_0X_1-2X_0X_2+4X_1X_2-3X_2^2=0$$

por el punto (1, 0, 2) es

$$\begin{aligned}(-X_0+5X_1-7X_2)^2-(-15)(X_0^2+2X_0X_1-2X_0X_2+4X_1X_2-3X_2^2)=\\ =16X_0^2+20X_0X_1-16X_0X_2+25X_1^2-10X_1X_2+4X_2^2=0.\end{aligned}$$

La matriz de esta cónica es

$$B=\begin{pmatrix}16 & 10 & -8\\ 10 & 25 & -5\\ -8 & -5 & 4\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |B|=0 \quad \text{y} \quad B_{\infty}>0,$$

luego representa un par de rectas imaginarias no paralelas. El punto (1, 0, 2) es, por tanto, interior.

EJERCICIOS

1. Posición relativa de la recta

$$r\equiv 3X_0-X_1+3X_2=0$$

y la cónica

$$\mathcal{C}\equiv -3X_0X_1+3X_0X_2+X_1^2-2X_1X_2+3X_2^2=0.$$

2. Ecuación de las tangentes a la cónica

$$\mathcal{C}\equiv -3X_0^2-4X_0X_1+4X_0X_2+X_1^2-2X_1X_2+X_2^2=0$$

en los puntos del infinito de ésta.

3. Hállese la ecuación conjunta de las tangentes trazadas a la cónica

$$\mathcal{C}\equiv 4X_0^2-X_1X_2-X_2^2=0$$

por el origen de coordenadas.

4. Ecuación de la circunferencia de centro sobre la recta $X_2-4=0$ y tangente a las circunferencias

$$\mathcal{C}_1 \equiv 6X_oX_1+X_1^2+X_2^2=0,$$
$$\mathcal{C}_2 \equiv -4X_o^2+X_1^2+X_2^2=0.$$

21.5. Polaridad en las cónicas.

Dada la cónica $\mathcal{C}\equiv XAX'=0$ y el punto P, tratemos ahora de hallar la ecuación del lugar geométrico del punto Q, conjugado armónico de P respecto a los de intersección de $\mathcal{C}$ con la recta determinada por P y Q.

Los puntos de intersección de $\mathcal{C}$ con la recta PQ son

$$\bar{P}=\lambda_oP+\lambda_1Q$$
$$\bar{\bar{P}}=\mu_oP+\mu_1Q$$

donde (λ_o, λ_1) y (μ_o, μ_1) son las raíces de la primera ecuación de (173).

Si la cuaterna $(P\ Q\ \bar{P}\ \bar{\bar{P}})$ es armónica, sabemos que

$$\lambda_o\mu_1+\lambda_1\mu_o=0,$$

luego si Q es el conjugado armónico de P respecto a $\bar{P}$ y $\bar{\bar{P}}$, se tiene

$$PAQ'=0$$

y, por tanto, el lugar buscado tendrá por ecuación

(177) $$PAX'=0,$$

que se puede escribir en las dos formas siguientes:

(177′) $$\begin{aligned} f_{X_o}P_o+f_{X_1}P_1+f_{X_2}P_2&=0,\\ f_{P_o}X_o+f_{P_1}X_1+f_{P_2}X_2&=0,\end{aligned}$$

pero ésta es la ecuación de una recta, o todo el plano si

$$f_{P_1}=f_{P_2}=f_{P_3}=0.$$

A este lugar geométrico se le llama *polar* del punto P respecto a la cónica $\mathcal{C}$.

EJEMPLO 1. La polar del punto P (1, 2, −4) respecto a

$$X_0^2+2X_0X_1-4X_0X_2+X_1^2-2X_1X_2+3X_2^2=0,$$

es

$$p\equiv f_{P_0}X_0+f_{P_1}X_1+f_{P_2}X_2=(1\cdot1+1\cdot2+(-2)(-4))X_0+$$
$$+(1\cdot1+1\cdot2+(-1)(-4))X_1+((-2)\cdot1+(-1)\cdot2+3\cdot(-4))X_2=$$
$$=11X_0+7X_1-16X_2=0.$$

De acuerdo con la definición anterior, los puntos de una cónica no tendrían polar respecto a ella. Se conviene en llamar polar de un punto de una cónica a la tangente a la cónica en este punto.

Si p es la polar de P, se dice que P es el *polo* de p.

Tratemos de hallar los puntos del plano para los que la polar respecto a una cónica $\mathcal{C}$ está indeterminada. Si P es uno de estos puntos, se tiene que verificar

$$f_{P_0}=f_{P_1}=f_{P_2}=0, \tag{178}$$

luego los puntos de polar indeterminada tienen por coordenadas homogéneas las soluciones del sistema

$$\begin{aligned}a_{00}x_0+a_{01}x_1+a_{02}x_2&=0\\ a_{01}x_0+a_{11}x_1+a_{12}x_2&=0\\ a_{02}x_0+a_{12}x_1+a_{22}x_2&=0,\end{aligned}$$

pero para que este sistema tenga una solución distinta de la trivial, es necesario que su rango sea menor que tres o, lo que es lo mismo, que $|A|=0$. En resumen, *sólo las cónicas degeneradas dan lugar a puntos de polar indeterminada.*

Si P es un punto de polar indeterminada respecto a la cónica degenerada $\mathcal{C}$, entonces $P\in\mathcal{C}$.

En efecto: $$PAP'=f_{P_0}P_0+f_{P_1}P_1+f_{P_2}P_2=0$$

de acuerdo con (178).

A los puntos de polar indeterminada respecto a una cónica se les llama *puntos singulares* de la cónica.

Si Q es otro punto de $\mathcal{C}$, la recta PQ pertenece a $\mathcal{C}$, pues si

$$X=\lambda P+\mu Q\Longrightarrow(\lambda P+\mu Q)A(\lambda P+\mu Q)'=$$
$$=(PAP')\lambda^2+2(PAQ')\lambda\mu+(QAQ')\mu^2=0$$

cualesquiera que sean λ y μ, ya que $PAP'=0$ por ser P singular;

$$PAQ'=f_{P_0}Q_0+f_{P_1}Q_1+f_{P_2}Q_2=0,$$

por la misma razón, y $QAQ'=0$ por pertenecer Q a $\mathcal{C}$.

EJEMPLO 2. Los puntos singulares de la cónica

$$\mathcal{C} \equiv 3X_0^2 + 5X_0X_1 - 2X_0X_2 - 2X_1^2 + 3X_1X_2 - X_2^2 = 0$$

son las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} 3X_0 + \frac{5}{2}X_1 - \quad X_2 &= 0 \\ \frac{5}{2}X_0 + \quad 2X_1 - \frac{3}{2}X_2 &= 0 \\ -X_0 + \frac{3}{2}X_1 - \quad X_2 &= 0 \end{aligned}$$

es decir, $(1, -4, -7)$.

POLARIDAD RESPECTO A UNA CÓNICA NO DEGENERADA.

Si $\mathcal{C}$ es una cónica no degenerada, la correspondencia que asocia a cada punto del plano su polar es una aplicación biyectiva del conjunto de puntos del plano en el conjunto de rectas del mismo. A esta correspondencia se le llama *polaridad.*

En efecto, si la recta p polar de P tiene por ecuación

$$U_0X_0 + U_1X_1 + U_2X_2 = 0$$

tenemos, de acuerdo con (177′):

$$\begin{aligned} \rho U_0 &= f_{P_0} = a_{00}P_0 + a_{01}P_1 + a_{02}P_2, \\ \rho U_1 &= f_{P_1} = a_{01}P_0 + a_{11}P_1 + a_{12}P_2, \\ \rho U_2 &= f_{P_2} = a_{02}P_0 + a_{12}P_1 + a_{22}P_2, \end{aligned}$$

y si llamamos U a la matriz $(U_0\ U_1\ U_2)$ se puede escribir en la siguiente forma:

$$\rho U = PA. \tag{179}$$

Puesto que $\mathcal{C}$ es no degenerada, $|A| \neq 0$ y existe A^{-1}. Multiplicando la ecuación anterior por A^{-1}, por la derecha, obtenemos

$$\lambda P = UA^{-1}$$

y, puesto que $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\operatorname{adj} A$, podemos englobar $|A|$ en el parámetro λ y nos queda

$$\lambda P = U \operatorname{adj} A,$$

que escrita en detalle,

$$(180)\qquad \begin{aligned} \lambda P_0 &= A_{00}U_0 + A_{01}U_1 + A_{02}U_2 \\ \lambda P_1 &= A_{01}U_0 + A_{11}U_1 + A_{12}U_2 \\ \lambda P_2 &= A_{02}U_0 + A_{12}U_1 + A_{22}U_2, \end{aligned}$$

fórmulas que nos dan las coordenadas homogéneas del polo P de la recta p.

A las ecuaciones (179) y (180) se les llama ecuaciones de la polaridad determinada por la cónica $\mathcal{C}$ en el plano.

EJEMPLO 3. Las ecuaciones de la polaridad determinada en el plano por la cónica $\mathcal{C} \equiv XAX' = 0$ del ejemplo 1 son:

$$\rho U = XA = X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

y

$$\lambda X = U \operatorname{adj} A = U \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

luego el polo de la recta $11X_0 + 7X_1 - 16X_2 = 0$ tiene las siguientes coordenadas homogéneas:

$$\begin{aligned} X_0 &= 2\cdot 11 + (-1)\cdot 7 + 1\cdot(-16) = -1, \\ X_1 &= (-1)\cdot 11 + (-1)\cdot 7 + (-1)(-16) = -2, \\ X_2 &= 1\cdot 11 + (-1)\cdot 7 + 0\cdot(-16) = 4. \end{aligned}$$

PUNTOS CONJUGADOS.

Se dice que el punto Q es *conjugado* del P respecto a la cónica $\mathcal{C}$, cuando Q pertenece a la polar p de P respecto a $\mathcal{C}$,

$$Q \in p,$$

pero, puesto que $p \equiv PAX' = 0$, se tiene que $PAQ' = 0$ o, lo que es igual, $QAP' = 0$, pero como $QAX' = 0$ es la ecuación de la polar q de Q respecto a $\mathcal{C}$, resulta que

$$P \in q,$$

es decir, si Q es conjugado de P respecto a $\mathcal{C}$, P es conjugado de Q. Se dice simplemente que son *conjugados*.

El resultado anterior se puede expresar de la siguiente forma: *Si el punto* Q *pertenece a la polar de* P, *éste pertenece a la polar de aquél.*

Si $\bar{P}$ es un punto de la recta determinada por P y Q, entonces $\bar{P}=\bar{\lambda}_0 P+\bar{\lambda}_1 Q$ y la polar $\bar{p}$ de $\bar{P}$ respecto a la cónica $\mathcal{C}$ tendrá por ecuación

$$\bar{p}\equiv\bar{P}AX'=(\bar{\lambda}_0 P+\bar{\lambda}_1 Q)AX'=\bar{\lambda}_0(PAX')+\bar{\lambda}_1(QAX')=0$$

pero $PAX'=0$ y $QAX'=0$ son las ecuaciones de las polares de los puntos P y Q respecto a $\mathcal{C}$, luego, teniendo también en cuenta el resultado anterior:

Las polares de los puntos de una recta forman un haz de rectas, cuyo vértice es el polo de dicha recta.

INTERSECCIÓN DE LA POLAR DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CÓNICA $\mathcal{C}$ CON ÉSTA.

Si un punto P es conjugado de sí mismo respecto a la cónica $\mathcal{C}$, se dice *autoconjugado*. Los puntos autoconjugados respecto a $\mathcal{C}$ son los puntos de $\mathcal{C}$.

Si $r\equiv X=\lambda P+\mu Q$ es la recta determinada por los puntos P y Q y si $r\notin C$, el único conjugado del $\bar{P}\in r$, que está sobre r será

$$\bar{\bar{P}}=r\cap\bar{p},$$

siendo $\bar{p}$ la polar de $\bar{P}$ respecto a $\mathcal{C}$. La transformación que a cada punto $\bar{P}$ de r le asocia su único conjugado $\bar{\bar{P}}$ sobre r es una involución. En efecto, si

$$\bar{P}=\bar{\lambda}_0 P+\bar{\lambda}_1 Q \quad \text{y} \quad \bar{\bar{P}}=\bar{\bar{\lambda}}_0 P+\bar{\bar{\lambda}}_1 Q$$

son conjugados respecto a $\mathcal{C}$, se tiene que verificar

$$(\bar{\lambda}_0 P+\bar{\lambda}_1 Q)A(\bar{\bar{\lambda}}_0 P+\bar{\bar{\lambda}}_1 Q)'=0,$$

de donde

$$(PAP')\bar{\lambda}_0\bar{\bar{\lambda}}_0+(PAQ')(\bar{\lambda}_0\bar{\bar{\lambda}}_1+\bar{\lambda}_1\bar{\bar{\lambda}}_0)+(QAQ')\bar{\lambda}_1\bar{\bar{\lambda}}_1=0$$

que es la ecuación de una involución. Nos referiremos a ella como la involución de puntos conjugados subordinada sobre r por la polaridad definida por $\mathcal{C}$ en E_2.

Los puntos dobles de esta involución son los puntos autoconjugados de r, es decir, los puntos de intersección de r con $\mathcal{C}$.

EJEMPLO 4. La involución subordinada por la cónica

$$X_0^2 - 2X_0X_1 + X_1^2 + 4X_1X_2 = 0$$

sobre la recta

$$r \equiv X = \lambda(1,\ 0,\ 2) + \mu(1,\ 1,\ 0)$$

tiene por ecuación

$$\bar{\lambda}_0\overline{\overline{\lambda}}_0 + 4(\bar{\lambda}_0\overline{\overline{\lambda}}_1 + \bar{\lambda}_1\overline{\overline{\lambda}}_0) = 0,$$

y el conjugado del punto $\bar{P}$ (5, 3, 4) de r, correspondiente a $\bar{\lambda}_0 = 2$ y $\bar{\lambda}_1 = 3$, será

$$2\overline{\overline{\lambda}}_0 + 4(2\overline{\overline{\lambda}}_1 + 3\overline{\overline{\lambda}}_0) = 0,$$

luego

$$\frac{\overline{\overline{\lambda}}_0}{\overline{\overline{\lambda}}_1} = -\frac{4}{7},$$

con lo que el conjugado de $\bar{P}$ es $\overline{\overline{P}}$ (3, 7, −8).

Se dice que la recta q es *conjugada* de la recta p respecto a la cónica $\mathcal{C} \equiv XAX' = 0$ si q contiene al polo P de la recta p.

Sea

$$p \equiv U_0X_0 + U_1X_1 + U_2X_2 = 0 \quad \text{y} \quad q \equiv V_0X_0 + X_1X_1 + V_2X_2 = 0$$

o, en forma matricial,

$$p \equiv UX' = 0 \quad \text{y} \quad q \equiv VX' = 0.$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (180) de la polaridad que $\mathcal{C}$ determina en el plano $\lambda P = U \text{ adj } A$, luego si

$$P \in q \Longrightarrow VP' = 0 \Longrightarrow V\ (\text{adj } A)U' = 0,$$

pero

$$V\ (\text{adj } A)U' = (V\ (\text{adj } A)U')' = U\ (\text{adj } A)V' = 0,$$

lo que nos dice que el polo $Q = V \text{ adj } A$ de q pertenece a p, y, por tanto, p es conjugado de q. Se dice simplemente que son *conjugados*.

La condición analítica para que dos rectas p y q sean conjugadas respecto a $\mathcal{C}$ es que

$$U\ (\text{adj } A)U' = 0. \tag{181}$$

Se dice que una recta es *autoconjugada* respecto a $\mathcal{C}$, si es conjugada de sí misma. La condición es

$$U(\text{adj } A)U' = 0. \tag{182}$$

Las rectas autoconjugadas respecto a $\mathcal{C}$ son las tangentes a $\mathcal{C}$. A la ecuación (182) se la llama ecuación tangencial de $\mathcal{C}$.

Sea el haz de rectas determinado por las p y q

$$(\lambda_0 U + \lambda_1 V)X' = 0.$$

Si $\bar{p}$ es la recta de este haz correspondiente a las coordenadas homogéneas $(\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1)$ y si el vértice del haz no es autoconjugado, a esta recta le corresponderá en el haz una sola conjugada $\bar{\bar{p}}$ respecto a $\mathcal{C}$ (la recta del haz que pasa por el polo $\bar{P}$ de $\bar{p}$). La correspondencia que a cada recta del haz le asocia su única conjugada respecto a $\mathcal{C}$ es una involución.

En efecto, si las coordenadas homogéneas de $\bar{\bar{p}}$ dentro del haz son $(\bar{\bar{\lambda}}_0, \bar{\bar{\lambda}}_1)$, se tiene que verificar

$$(\bar{\lambda}_0 U + \bar{\lambda}_1 V)(\text{adj } A)(\bar{\bar{\lambda}}_0 U + \bar{\bar{\lambda}}_1 V)' = 0$$

o, haciendo operaciones,

$$(U(\text{adj } A)U')\bar{\lambda}_0\bar{\bar{\lambda}}_0 + (U(\text{adj } A)V')(\bar{\lambda}_0\bar{\bar{\lambda}}_1 + \bar{\lambda}_1\bar{\bar{\lambda}}_0) + \\ + (V(\text{adj } A)V')\bar{\lambda}_1\bar{\bar{\lambda}}_1 = 0$$

que es la ecuación de una involución.

EJEMPLO 5. La ecuación tangencial de la cónica del ejemplo anterior es

$$U\begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}U' = 0, \qquad U_0^2 + U_0U_1 + U_1U_2 = 0.$$

La involución de rectas conjugadas subordinada por la polaridad, en el haz

$$\lambda_0(2X_0 - 3X) + \lambda_1(X_0 + X_1 - X_2) = 0$$

tiene por ecuación

$$4\bar{\lambda}_0\bar{\bar{\lambda}}_0 + 6(\bar{\lambda}_0\bar{\bar{\lambda}}_1 + \bar{\lambda}_1\bar{\bar{\lambda}}_0) + 2\bar{\lambda}_1\bar{\bar{\lambda}}_1 = 0.$$

POSICIÓN RELATIVA DE LA POLAR DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CÓNICA Y DICHA CÓNICA.

Sea $p \equiv PAX' = 0$, la polar del punto P respecto a la cónica

$$\mathcal{C} \equiv XAX' = 0$$

y

$$t \equiv (PAX')^2 - (PAP')(XAX') = 0$$

del par de tangentes a $\mathcal{C}$ por P.

El sistema

$$\begin{cases} XAX' = 0 \\ PAX' = 0 \end{cases}$$

representa $p \cap \mathcal{C}$, y el

$$\begin{cases} XAX' = 0 \\ (PAX')^2 - (PAP')(XAX') = 0 \end{cases}$$

representa $t \cap \mathcal{C}$.

Es fácil comprobar que los dos sistemas son equivalentes. Luego, los puntos de intersección de p con $\mathcal{C}$ son los de contacto de las tangentes trazadas a $\mathcal{C}$ por P. Por tanto, si P es exterior a $\mathcal{C}$, dichos puntos de intersección serán reales y distintos; si $P \in \mathcal{C}$ serán reales confundidos, y si P es interior a $\mathcal{C}$, serán imaginarios conjugados, es decir, en el primer caso p será secante a $\mathcal{C}$, en el segundo tangente y en el tercero exterior.

EJERCICIOS

1. Dada la cónica

$$\mathcal{C} \equiv 5X_0 - 4X_0X_1 + X_1^2 + 2X_2 = 0,$$

hállese:

a) la polar del punto $(1, -3, 2)$,
b) el polo de la recta $2X_0 + 3X_1 - 4X_2 = 0$,
c) ecuación de la involución de rectas conjugadas con vértice en el punto $(1, 2, 1)$,
d) rayos dobles y rayos principales en la involución anterior,
e) recta conjugada de la $7X_0 - 2X_1 - 3X_2 = 0$ en dicha involución,
f) ecuación tangencial de la cónica, y
g) transformada de la cónica $2X_0X_1 - X_1^2 - X_2^2 = 0$ en la polaridad determinada por $\mathcal{C}$.

2. Dadas las cónicas

$$\mathcal{C}_1 \equiv 2X_0^2 + 2X_0X_1 + X_2^2 = 0$$
$$\mathcal{C}_2 \equiv 2X_0X_1 + 4X_1X_2 + X_2^2 = 0$$

sea $Q = p_1 \cap p_2$, donde p_1 y p_1 son las polares del punto P respecto a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente. Hállese el lugar geométrico descrito por Q cuando P recorre la recta $2X_0 - X_1 + X_2 = 0$.

3. Demuéstrese que el polo de la recta del infinito respecto a la cónica $\mathcal{C} \equiv 4X_0^2 - X_1X_2 = 0$ y el polo P de la recta determinada por dos puntos Q_1 y Q_2 de $\mathcal{C}$, son conjugados respecto a la circunferencia, uno de cuyos diámetros es Q_1Q_2.

21.6. Centros, diámetros, asíntotas, ejes y focos de las cónicas.

Dada una cónica $\mathcal{C} \equiv XAX' = 0$, se llaman *centros* de $\mathcal{C}$ a los polos de la recta del infinito respecto de $\mathcal{C}$, cuando no son autoconjugados.

Un centro de una cónica biseca a las cuerdas de la misma que pasan por él. Es consecuencia de ser conjugado armónico con el punto del infinito de la recta base de la cuerda, respecto a los extremos de dicha cuerda.

La ecuación de la polar de un punto P respecto a $\mathcal{C}$ es $PAX' = 0$, o bien

$$f_{P_0}X_0 + f_{P_1}X_1 + f_{P_2}X_2 = 0,$$

para que esta recta sea la del infinito, $X_0 = 0$, se tiene que verificar

$$f_{P_1} = 0, \quad f_{P_2} = 0,$$

luego las coordenadas de los polos de la recta del infinito respecto a $\mathcal{C}$ serán las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} a_{01}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{02}x_0 + a_{12}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{183}$$

Casos que pueden ocurrir:

1.° Que $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = 2$. En este caso, desde el punto de vista geométrico, no existe más que una solución que viene dada por

$$\frac{x_0}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{x_1}{-\begin{vmatrix} a_{01} & a_{12} \\ a_{02} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{x_2}{\begin{vmatrix} a_{01} & a_{11} \\ a_{02} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

luego el punto (A_{00}, A_{01}, A_{02}) será el único polo de $X_0 = 0$ respecto a $\mathcal{C}$. Será autoconjugado o no según que pertenezca o no a su polar, luego dicho punto será centro o no según que A_{00} sea distinto o igual a cero.

En las cónicas irreducibles $|A| \neq 0$, luego A_{00}, A_{01} y A_{02} no pueden ser simultáneamente nulos y, por tanto, respecto a estas cónicas existe un único polo de la recta del infinito. En las elipses e hipérbolas $A_{00} \neq 0$, luego estas cónicas tienen centro único. En la parábola $A_{00} = 0$, por lo que la parábola no tiene centro.

En el par de rectas no paralelas $A_{\infty} \neq 0$, luego estas cónicas poseen un único centro.

2.° Que $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = 1$. En este caso, el sistema (183) es equivalente al formado por una sola de sus ecuaciones. La cónica tiene infinitos centros alineados o ninguno. Este último caso sólo sucede cuando el sistema es equivalente a $X_0 = 0$.

En las rectas paralelas, la paralela media es recta de centros. En el par de rectas confundidas todo punto de la cónica es centro (con tal de que la cónica no sea la $X_0^2 = 0$).

EJEMPLO 1. El centro de la cónica

$$\mathcal{C} \equiv 9X_0^2 - 12X_0X_1 + 4X_1^2 + 4X_1X_2 = 0$$

es el punto (1, 0, 3), puesto que $A_{\infty} = -4$, $A_{01} = 0$ y $A_{02} = -12$.

Se llaman *diámetros* de una cónica $\mathcal{C}$ a las polares de los puntos del infinito, siempre que no sean autoconjugadas. En este último caso se les llama *asíntotas*.

Evidentemente los diámetros y asíntotas de una cónica contienen a los centros de ésta.

Sea el punto del infinito P (0, 1, m). La polar de este punto respecto a la cónica $\mathcal{C} \equiv XAX' = 0$ es

$$(184) \qquad p \equiv (a_{01} + a_{02}m)X_0 + (a_{11} + a_{12}m)X_1 + (a_{12} + a_{22}m)X_2 = 0$$

que también puede escribirse en la forma

$$(185) \qquad p \equiv f_{X_1} + f_{X_2}m = 0,$$

y esta recta será diámetro o asíntota según que $P \notin p$ o $P \in p$, luego en el último caso se verificará

$$(a_{11} + a_{12}m) + (a_{12} + a_{22}m)m = 0,$$

luego la ecuación

$$(186) \qquad a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0$$

nos dará los puntos (0, 1, m) del infinito de las asíntotas de $\mathcal{C}$.

Si el sistema de referencia es métrico, (0, 1, m) representa el punto del infinito de las rectas de pendiente m. En efecto, si cortamos $X_2 = mX_1$ por $X_0 = 0$, obtenemos el punto indicado.

Si eliminamos m entre (185) y (186) obtenemos la ecuación conjunta de las asíntotas de $\mathcal{C}$

$$(187) \qquad a_{22}f_{X_1}^2 - 2a_{12}f_{X_1}f_{X_2} + a_{11}f_{X_2}^2 = 0.$$

En las cónicas con centro los diámetros forman un haz de rectas de vértice el centro. Se llaman *diámetros conjugados* a dos diámetros homólogos en la involución de la polaridad determinada por $\mathcal{C}$, subordinada sobre el haz de vértice dicho centro. Los rayos dobles de esta involución son las asíntotas.

Si $(0, 1, \bar{m})$ es el punto del infinito del diámetro (184) se verifica

$$(a_{11}+a_{12}m)+(a_{12}+a_{22}m)\bar{m}=0$$

de donde

$$a_{22}m\bar{m}+a_{12}(m+\bar{m})+a_{11}=0 \tag{188}$$

que es la ecuación de la involución de diámetros conjugados. Obsérvese que es también la involución de puntos conjugados sobre la recta del infinito. Despejando $\bar{m}$

$$\bar{m}=-\frac{a_{11}+a_{12}m}{a_{12}+a_{22}m}. \tag{189}$$

A la dirección caracterizada por el punto del infinito $(0, 1, \bar{m})$ se le llama dirección conjugada del diámetro (184).

En la parábola todos los diámetros pasan por el punto del infinito de ésta, luego son todos paralelos. Puesto que

$$A_{oo}=a_{11}a_{22}-a_{12}=0$$

tenemos

$$\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{a_{11}+a_{12}m}{a_{12}+a_{22}m}$$

para todo valor de m, luego

$$\bar{m}=-\frac{a_{11}}{a_{12}}=-\frac{a_{12}}{a_{22}}$$

y

$$\left(0,\ 1,\ -\frac{a_{11}}{a_{12}}=-\frac{a_{12}}{a_{22}}\right)$$

es el punto del infinito de la parábola.

En las rectas paralelas no hay más diámetro que la paralela media y en las confundidas dicha recta es el único diámetro.

EJEMPLO 2. Las asíntotas de la cónica

$$\mathcal{C}\equiv 9X_o^2-12X_oX_1+4X_1^2+4X_1X_2=0$$

vienen dadas por la ecuación conjunta

$$2\cdot(-4)(-6X_o+4X_1+2X_2)(2X_1)+4\cdot(2X_1)^2=0$$

luego éstas son

$$X_1=0 \quad \text{y} \quad 6X_o-3X_1-2X_2=0.$$

El diámetro correspondiente al punto (0, 1, 4) es el

$$(-6)X_o+(4+2\cdot 4)X_1+2X_2=0,$$

es decir,

$$-3X_o+6X_1+X_2=0.$$

La involución de diámetros conjugados tiene por ecuación

$$2(m+\bar{m})+4=0.$$

Se llaman *ejes* de una cónica a los diámetros que son perpendiculares a sus direcciones conjugadas. Si (0, 1, m) es un punto que tiene por polar un eje, se tiene que verificar

$$m\bar{m}=-1,$$

luego, teniendo en cuenta (189),

$$a_{12}m^2+(a_{11}-a_{22})m-a_{12}=0 \tag{190}$$

nos dará (en un sistema de referencia métrico) la pendiente de los ejes de una cónica con centro.

Eliminando m entre (185) y (190), obtenemos

$$a_{12}f_{X_1}^2+(a_{22}-a_{11})f_{X_1}f_{X_2}-a_{12}f_{X_2}=0$$

como ecuación conjunta de ambos ejes.

En la parábola no hay más que un eje, que es la polar del punto

$$\left(0,\ 1,\ \frac{a_{12}}{a_{11}}=\frac{a_{22}}{a_{12}}\right)$$

luego la ecuación de dicho eje es

$$a_{11}f_{X_1}+a_{12}f_{X_2}=0. \tag{191}$$

EJEMPLO 3. Los ejes de la cónica del ejemplo anterior vienen dados por la ecuación conjunta

$$9X_o^2-6X_oX_1-6X_oX_2-X_1^2+2X_1X_2+X_2^2=0.$$

Las ecuaciones se podían haber hallado calculando mediante

$$m^2+2m-1=0$$

las pendientes

$$m_1 = -1+\sqrt{2} \quad \text{y} \quad m_2 = -1-\sqrt{2},$$

y teniendo en cuenta que ambos ejes contienen al centro (1, 0, 3), resulta que

$$3X_0-(1+\sqrt{2})X_1-X_2=0$$
$$3X_0-(1-\sqrt{2})X_1-X_2=0,$$

son las ecuaciones de los ejes.

EJEMPLO 4. El eje de la parábola

$$\mathcal{C}\equiv X_0^2+2X_0X_1-2X_0X_2+4X_1^2-4X_1X_2+X_2^2=0$$

es

$$4(X_0+4X_1-2X_2)+(-2)(-X_0-2X_1+X_2)=0$$

es decir

$$3X_0+10X_1-5X_2=0.$$

Se llaman *focos* de una cónica $\mathcal{C}$ a los puntos vértices de haces de rectas, en los que la involución subordinada por la polaridad definida por $\mathcal{C}$ en E_2, es la rectangular. Los focos son, por tanto, los puntos del plano tales que las tangentes trazadas por ellos a la cónica son las rectas isótropas.

Recordando que los puntos del infinito de todas las rectas isótropas del plano son los puntos cíclicos, podemos dar una nueva definición de focos de una cónica: *son los puntos de intersección de las tangentes a la cónica $\mathcal{C}$ trazadas desde los puntos cíclicos.*

Desde cada punto cíclico se pueden trazar dos tangentes a una cónica con centro $\mathcal{C}$, luego ésta tendrá cuatro focos: los puntos de intersección de cada una de las dos tangentes desde un punto cíclico con las dos tangentes correspondientes al otro. Puesto que ambos puntos cíclicos son imaginarios conjugados y los coeficientes de $\mathcal{C}$ son reales, las dos primeras tangentes son imaginarias conjugadas de las dos segundas, luego dos puntos de intersección serán reales y otros dos imaginarios.

En la parábola no hay más que un foco real, pues al ser tangente a la recta del infinito, dos de las tangentes trazadas a la cónica desde los puntos cíclicos coinciden con la recta del infinito. Las otras dos tangentes son imaginarias conjugadas, luego su intersección será real.

Sea F un foco de $\mathcal{C}$, entonces la ecuación

$$(FAX')^2-(FAF')(XAX')=0$$

debe ser la ecuación conjunta de las tangentes a la cónica por F, pero entonces tiene que ser la ecuación conjunta de las rectas isótropas que pasan por F

$$(F_0X_1-F_1X_0)^2+(F_0X_2-F_2X_0)^2=0.$$

Identificando ambas ecuaciones obtenemos un sistema cuyas soluciones son las coordenadas homogéneas de los focos.

También se pueden hallar los focos de una cónica mediante este procedimiento.

EJEMPLO 5. Sea la cónica

$$\mathcal{C}\equiv X_0^2+2X_0X_2+X_1^2+4X_1X_2+4X_2^2=0$$

y $F\ (1, F_1, F_2)$ un foco. Las rectas

$$r\equiv\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & F_1 & F_2 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix}=0, \qquad s\equiv\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & F_1 & F_2 \\ 0 & -m & 1 \end{vmatrix}=0$$

pasan por F y son conjugadas por ser perpendiculares. Sea $R\ (R_0, R_1, R_2)$ el polo de r, entonces

$$RAX'=0,$$
$$(R_0+R_2)X_0+(R_1+2R_2)X_1+(R_0+2R_1+4R_2)X_2=0$$

es la recta r, identificando

$$\left.\begin{array}{l} R_0+R_2=\lambda(mF_1-F_2) \\ R_1+2R_2=-\lambda m \\ R_0+2R_1+4R_2=\lambda \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} R_0=\lambda(1+2m) \\ R_1=\lambda(3m+2F_2-2mF_1+2) \\ R_2=\lambda(-F_2+mF_1-2m-1) \end{array}$$

pero $R\in s$, luego

$$-3m-2F_2+2mF_1-2+mF_2-m^2F_1+2m^2+m+mF_2+$$
$$+2mF_2^2+F_1+2mF_1=0,$$

y esto ha de ser cierto para todo valor de m, luego

$$\left.\begin{array}{r} -F_1+2+2F_2=0 \\ -3+2F_1+F_2+1+F_2+2F_1=0 \\ 2F_2-2+F_1=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} F_1=\dfrac{4}{5} \\ \\ F_2=-\dfrac{3}{5} \end{array}$$

Se llaman *directrices* de una cónica a las polares de los focos.

CÓNICAS HOMOFOCALES.

Dos cónicas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ se llaman *homofocales* si tienen los mismos focos. Toda cónica homofocal a una cónica con centro es una cónica con centro, y toda cónica homofocal a una parábola es una parábola.

Al conjunto de todas las cónicas homofocales a una dada se le llama *familia de cónicas homofocales*. Hay, por tanto, dos tipos distintos de familias homofocales, uno que consiste enteramente de cónicas con centro y el otro de parábolas.

Puesto que, para cónicas reales, la relación de ser homofocales es una relación de equivalencia, una familia de cónicas homofocales está determinada por uno de sus miembros.

Si $\mathcal{C}$ es una cónica central, cuyos focos son F, F', G y G', la familia de cónicas homofocales será como la de la figura

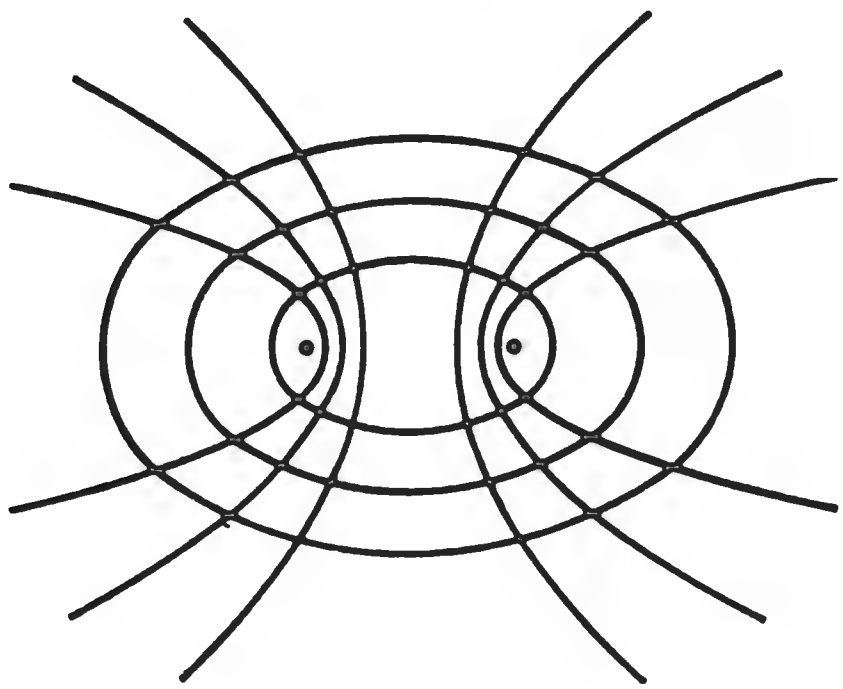


FIG. 10.

y es evidente que todas tienen el mismo centro y los mismos ejes.

El segundo tipo de cónicas homofocales tendría el siguiente aspecto:

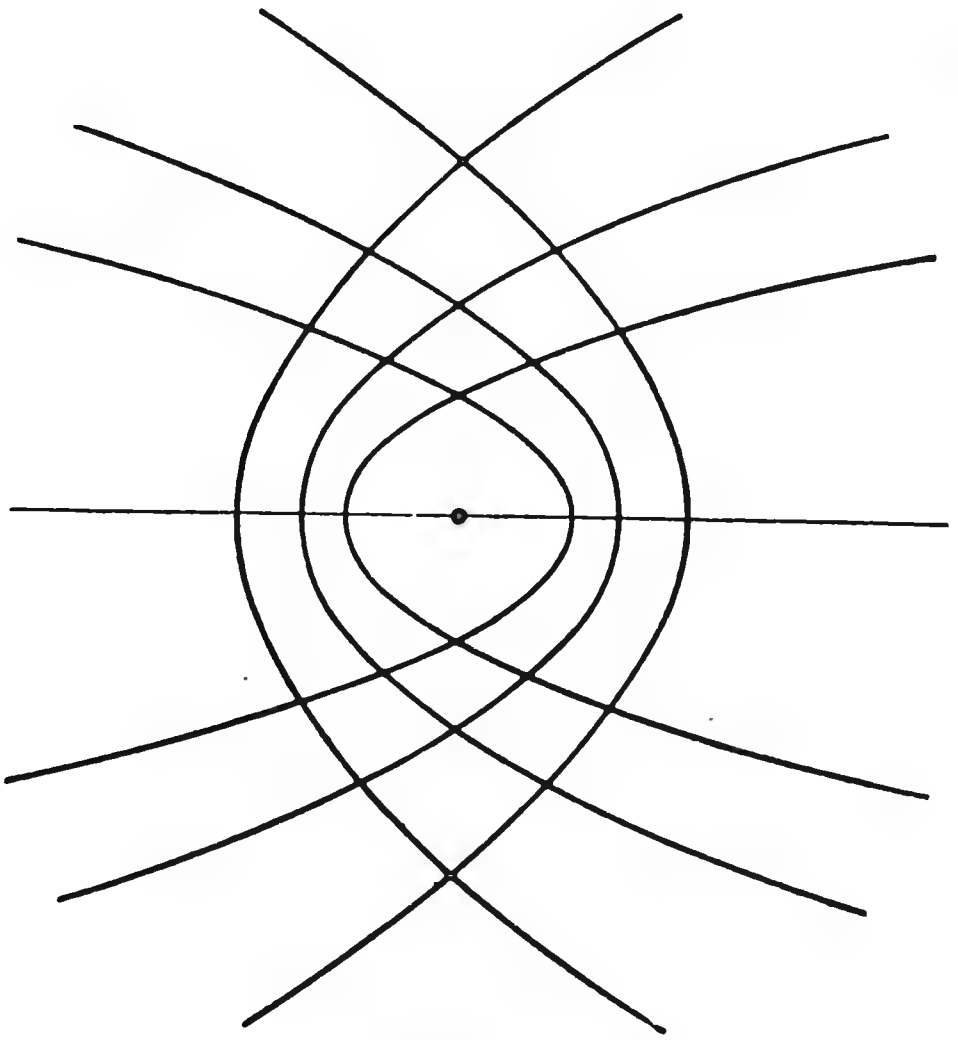


FIG. 11.

EJERCICIOS

1. Hállense el centro, ejes y asíntotas de la cónica

$$\mathcal{C} \equiv 4X_o^2 - 6X_oX_1 + 2X_oX_2 + 2X_1^2 - 4X_1X_2 - 2X_2^2 = 0.$$

2. Hállense los focos y directrices de la cónica

$$\mathcal{C} \equiv X_o^2 + 2X_oX_1 - 2X_oX_2 + X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 = 0.$$

3. Hállense los coeficientes angulares de los diámetros conjugados a la cónica

$$X_o^2 - 2X_oX_1 + X_1^2 + 4X_1X_2 - 3X_2^2 = 0$$

que forman entre sí ángulo de 60°.

4. Hállense, utilizando las definiciones dadas, los focos y directrices de

a) la elipse: $a^2b^2X_o^2 - b^2X_1^2 - a^2X_2^2 = 0$,
b) la hipérbola: $a^2b^2X_o^2 - b^2X_1^2 + a^2X_2^2 = 0$,
c) la parábola: $2pX_oX_1 - X_2^2 = 0$.

5. Demuéstrese, utilizando el ejercicio anterior, que las tres cónicas citadas pueden definirse conjuntamente como el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas distancias a un punto fijo (foco) y a una recta fija (directriz) están en una razón constante.

6. Utilizando el ejercicio anterior, compruébese que todas las cónicas que tienen F $(F_o\ F_1\ F_2)$ como foco y $d \equiv d_oX_o + d_1X_1 + d_2X_2$ como la directriz correspondiente, se obtienen dando a λ todos los valores reales en la ecuación

$$(F_oX_1 - F_1X_o)^2 + (F_oX_2 - F_2X_o)^2 = \lambda(d_oX_o + d_1X_1 + d_2X_2)^2.$$

7. Hállese la ecuación de una hipérbola equilátera que tiene por uno de sus focos el punto F $(1, 2, -1)$ y cuya directriz correspondiente es la recta $X_1 - X_2 = 0$.

8. Dada la cónica

$$\mathcal{C} \equiv 24X_o^2 - 6X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2 = 0,$$

hállense: 1.°, centro; 2.°, ejes; 3.°, asíntotas, y 4.°, involución de rectas conjugadas de vértice V $(1, 1, 2)$.

9. Demuéstrese que

$$\frac{X_1^2}{a^2+\lambda} + \frac{X_2^2}{b^2+\lambda} = X_o^2$$

es la ecuación de la familia de cónicas homofocales determinada por la elipse

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = X_o^2.$$

10. Demuéstrese que por cada punto del plano pasan dos cónicas de una familia dada de cónicas homofocales y que dicho par de cónicas se cortan ortogonalmente.

21.7. Determinación de cónicas. Haces de cónicas.

En la ecuación de una cónica hay seis coeficientes a_{ij} $(i \leq j,$ $i, j = 0, 1, 2)$. Como no todos pueden ser nulos, siempre será posible dividir por uno de ellos, con lo que quedarán sólo cinco parámetros fundamentales. Por tanto, para determinar una cónica se necesitan cinco condiciones independientes. Por ejemplo, cinco puntos, tales que tres de ellos no estén alineados, determinan una cónica.

Decimos que la condición de pasar una cónica por un punto fijo o que dos puntos fijos sean conjugados respecto a la cónica son condiciones lineales, porque ambas condiciones se traducen en ecuaciones lineales en los coeficientes a_{ij} de la cónica. Sin embargo, el que una recta $U_0X_0 + U_1X_1 + U_2X_2 = 0$ sea tangente a la cónica, es una condición cuadrática, puesto que da lugar a la ecuación

$$U(\text{adj } A)U' = 0,$$

que es lineal en los adjuntos A_{ij} de la matriz A de la cónica y, por tanto, cuadrática en los elementos a_{ij} de ésta. El hecho de ser parábola la cónica es también una condición cuadrática, ya que equivale a $A_{00} = 0$.

El dar el centro de la cónica equivale a dos condiciones lineales; el dar dos puntos conjugados, a una condición lineal; dos relaciones lineales dar un punto y su polar o una tangente y el punto de contacto; ser tangente una recta equivale a una relación cuadrática, etc.

Haces de cónicas.

Dadas dos cónicas

$$\mathcal{C}_1 \equiv XAX' = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_2 \equiv XBX' = 0,$$

llamaremos haz de cónicas al conjunto de todas las cónicas del plano que se obtienen al dar a λ_0 y λ_1 todos los valores reales posibles (no simultáneamente nulos) en la ecuación

$$\lambda_0 XAX' + \lambda_1 XBX' = 0. \tag{192}$$

Todas las cónicas del haz pasan por los puntos comunes a las cónicas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, puesto que si

$$P \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \Longrightarrow PAP' = 0, \quad PBP' = 0,$$

de donde

$$\lambda_0 PAP' + \lambda_1 PBP' = 0$$

cualesquiera que sean los valores de λ_0 y λ_1.

Puesto que el sistema $\begin{cases} XAX' = 0 \\ XBX' = 0 \end{cases}$

que daría los puntos comunes a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ está constituido por dos ecuaciones cuadráticas, al resolverlo llegaríamos a una ecuación de cuarto grado, luego dos cónicas tienen cuatro puntos comunes que según sean las raíces de dicha ecuación de cuarto grado, pueden ser:

a) reales distintos,
b) dos reales distintos y dos reales confundidos,
c) dos parejas distintas de puntos reales confundidos,
d) tres reales confundidos y uno real distinto,
e) reales confundidos,
f) dos reales distintos y dos imaginarios conjugados,
g) dos reales confundidos y dos imaginarios conjugados,
h) dos parejas distintas de imaginarios conjugados,
i) dos parejas confundidas de imaginarios conjugados.

Entonces, un haz de cónicas es el conjunto de las cónicas del plano que pasan por cuatro puntos fijos. A estos puntos se les llama puntos *base* del haz.

Por cada punto P del plano (distinto de los puntos base) pasa una y sólo una cónica del haz. En efecto, las coordenadas (λ_o, λ_1) de la cónica en cuestión se obtendrían de la ecuación que resultaría de sustituir en (192) las variables por las coordenadas de P, y dicha ecuación es lineal.

La matriz $\lambda_o A + \lambda_1 B$ es la matriz de la cónica genérica del haz.

Las cónicas degeneradas del haz tienen por coordenadas en el mismo las raíces de la ecuación $|\lambda_o A + \lambda_1 B| = 0$. Como ésta es de tercer grado, en cada haz hay tres cónicas degeneradas, reales o imaginarias, distintas o confundidas.

Todo haz puede determinarse mediante una pareja cualquiera de cónicas del mismo.

El haz correspondiente al caso *a)* sería de la forma

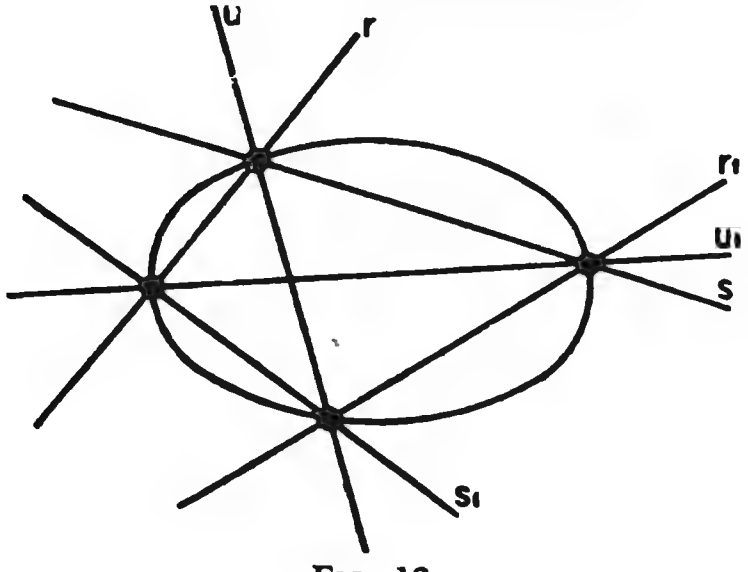


FIG. 12.

las cónicas degeneradas del haz son:

$$ss_1=0, \quad rr_1=0 \quad \text{y} \quad uu_1=0.$$

El haz podría determinarse mediante dos cónicas degeneradas cualesquiera

$$\lambda_o rr_1+\lambda_1 ss_1=0.$$

b) Es el conjunto de cónicas tangentes en un punto T y que pasan por otros dos puntos P y Q fijos.

$$\lambda_o rr_1+\lambda_1 st=0.$$

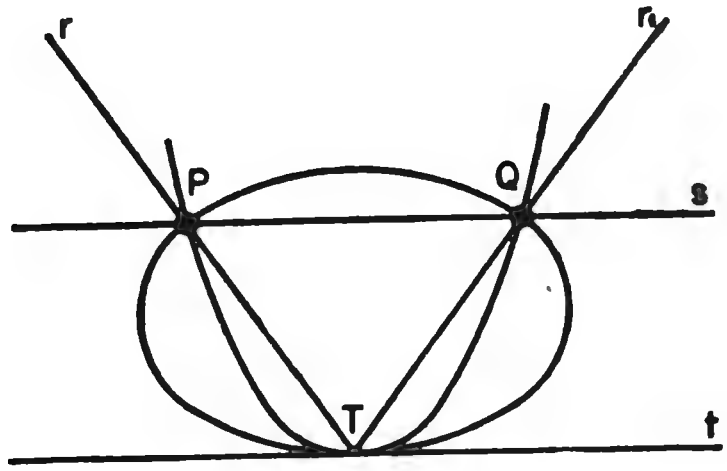


FIG. 13.

c) Cónicas bitangentes (tangentes en dos puntos)

$$\lambda_o tt_1+\lambda_1 s^2=0.$$

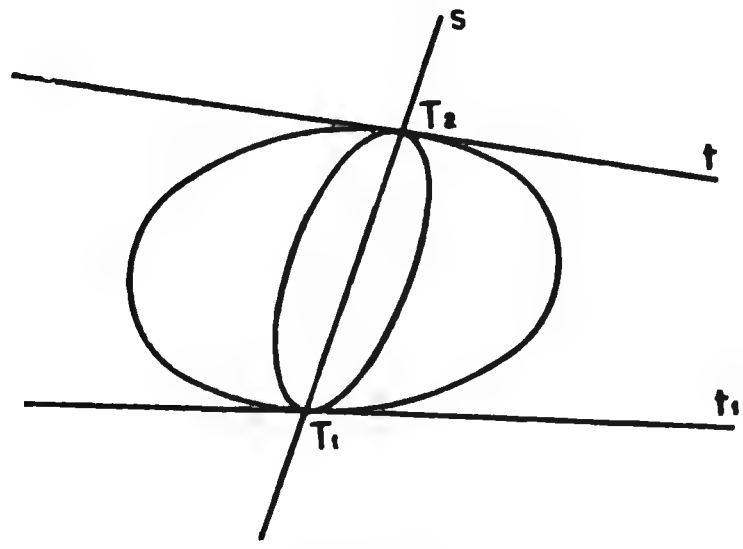


FIG. 14.

d) Es el conjunto de todas las cónicas que tienen tres puntos confundidos en T (se dice que tienen un contacto de segundo orden

en T) y que pasan por un cuarto punto P. Se les llama cónicas *osculatrices* en T.

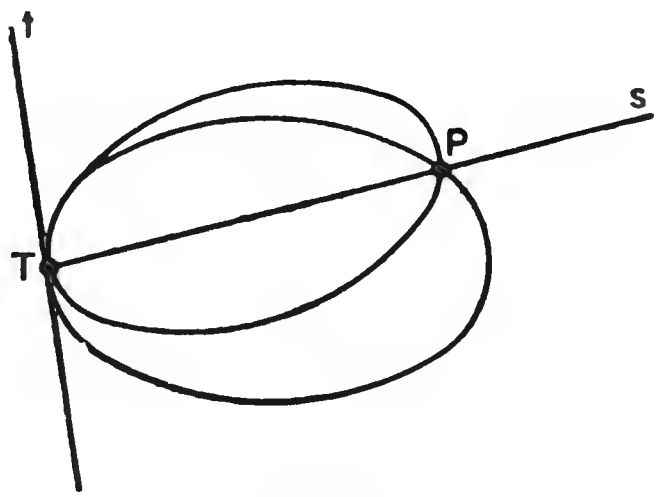


FIG. 15.

No hay más cónicas degeneradas que la $ts=0$. El haz se podría escribir en la forma

$$\lambda_0 ts + \lambda_1 C = 0,$$

siendo C otra cónica de él.

e) Cónicas que tienen cuatro puntos confundidos en T (se dice que tienen un contacto de tercer orden en dicho punto). Se las llama cónicas *hiperosculatrices*. No hay más cónica degenerada que la $t^2=0$.

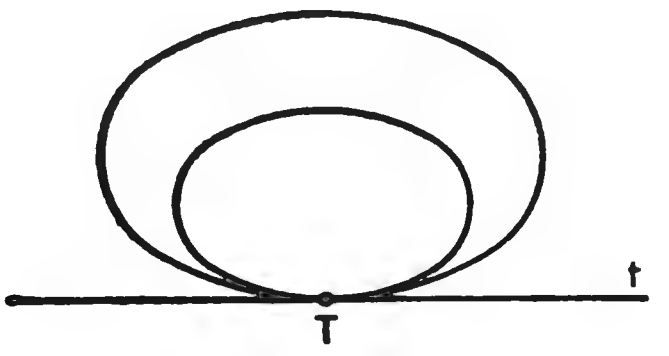


FIG. 16.

El haz se puede expresar en la forma

$$\lambda_0 t^2 + \lambda_1 C = 0.$$

Los restantes casos carecen de interés.

Los haces de cónicas son muy útiles en la determinación de cónicas.

EJEMPLO 1. Para determinar la cónica que pasa por los puntos

A (1, 0, 0), B (1, 0, 1), C (0, 2, 0), D (1, 1, 1) y F (0, -1, 2), hallamos primero las rectas

$$AB\equiv\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0, \qquad X_1=0,$$

$$CD\equiv\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0, \qquad X_0-X_2=0,$$

$$AC\equiv\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0, \qquad X_2=0,$$

$$BD\equiv\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0, \qquad -X_0+X_2=0.$$

La cónica pedida pertenecerá al haz

$$\lambda_0X_1(X_0-X_2)+\lambda_1X_2(-X_0+X_2)=0$$

y como ha de pasar por F

$$2\lambda_0+4\lambda_1=0\Longrightarrow\lambda_0=2, \qquad \lambda_1=-1,$$

luego

$$2X_0X_1+X_0X_2-2X_1X_2-X_2^2=0$$

es la cónica pedida.

EJERCICIOS

1. Hállense: 1.º, los puntos básicos del haz

$$\lambda_0(-2X_0X_1+X_1^2)+\lambda_1(4X_0X_2-2X_1X_2+2X_2^2)=0;$$

2.º, el lugar geométrico de los centros de las cónicas del haz, y 3.º, el lugar geométrico de los puntos de las cónicas del haz donde las tangentes tienen pendiente nula.

2. Hállense las cónicas degeneradas del haz determinado por las cónicas

$$\mathcal{C}_1\equiv 2X_{02}+2X_0X_2+3X_1^2-2X_1X_2+X_2^2=0$$

y

$$\mathcal{C}_2\equiv -3X_0^2-2X_0X_1-2X_0X_2-5X_1^2+2X_1X_2-X_2^2=0.$$

3. Hállense: 1.º, la ecuación de la hipérbola tangente a $X_1=0$ en el punto (2, 0, 3), que tiene como asíntota la recta $3X_0-X_2=0$ y que pasa por el punto (1, 1, 0); 2.º, el centro; 3.º, la otra asíntota, y 4.º, los ejes.

4. Demuéstrese que el conjunto de las cónicas de un haz cortan a una recta en pares de puntos que son conjugados en una involución. Aplicación al caso de todas las circunferencias que pasan por los puntos P (1, 1, 1) y Q (1, 0, 2) y a la recta $X_2=0$. Hállese la ecuación de la involución, su centro y las circunferencias del haz que son tangentes a $X_2=0$.

5. Hállese la ecuación de la parábola tangente a los ejes coordenados siendo dos de sus puntos P (1, 1, 1) y Q (1, 3, 0).

6. Hállese la ecuación de una circunferencia sabiendo que el punto del infinito del eje OX_1 y el origen de coordenadas son conjugados y que la polar del punto (1, -2, 0) es la recta

$$X_1+X_2=0.$$

7. Ecuación, clasificación, centro y asíntotas de la cónica tangente en (1, 0, 0) a $X_1=0$, que pasa por (0, 1, 0) y (1, 2, -3), siendo conjugados respecto de la misma (1, 1, 1) y (0, 1, -1).

JAR'23

22

Cuádricas (continuación)

Vamos a efectuar un estudio de las cuádricas análogo al estudio de las cónicas realizado en el capítulo anterior. Pero antes vamos a trasladar al espacio de tres dimensiones algunos de los conceptos que se definieron para el plano en dicho capítulo.

22.1. Coordenadas homogéneas en el espacio. Puntos del infinito. Puntos imaginarios. Elementos isótropos.

Sea $\{O;\ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ un sistema de referencia en el espacio afín E_3. A todo punto $X\ (x_1, x_2, x_3)$ se le puede asignar un conjunto ordenado de cuatro números reales (X_o, X_1, X_2, X_3), siendo el primero no nulo, mediante las fórmulas

$$X_1 = x_1 X_o, \qquad X_2 = x_2 X_o, \qquad X_3 = x_3 X_o, \tag{193}$$

y estos tres números están determinados de manera única, salvo un coeficiente de proporcionalidad.

Recíprocamente, cuatro números reales X_o, X_1, X_2, X_3 dados en un cierto orden y tales que el primero sea distinto de cero, definen de manera única un punto X de E_3, cuyas coordenadas (x_1, x_2, x_3) satisfacen las relaciones (193).

A estos cuatro números X_o, X_1, X_2, X_3, se les llama coordenadas homogéneas del punto X así determinado. La condición necesaria para que (X_o, X_1, X_2, X_3) e (Y_o, Y_1, Y_2, Y_3) determinen el mismo punto es que

$$\frac{X_o}{Y_o} = \frac{X_1}{Y_1} = \frac{X_2}{Y_2} = \frac{X_3}{Y_3}.$$

Puntos del infinito.

Las coordenadas homogéneas nos van a permitir añadir al conjunto de los puntos del espacio unos nuevos puntos que nos serán de gran utilidad.

Sea la recta r de ecuación vectorial

$$\mathbf{x}=\mathbf{p}+\lambda\mathbf{v}.$$

Si en la ecuación anterior hacemos tender λ a infinito, una al menos de las coordenadas del punto genérico de la recta tiende a infinito. Sin embargo, si se asocian a este punto las coordenadas homogéneas

$$X_0=\frac{1}{\lambda},\quad X_1=\frac{p_1}{\lambda}+v_1,\quad X_2=\frac{p_2}{\lambda}+v_2,\quad X_3=\frac{p_3}{\lambda}+v_3,$$

estas permanecen finitas al tender λ a infinito y tienen por límite: $0, v_1, v_2, v_3$, respectivamente. Diremos, por definición, que $(0, v_1, v_2, v_3)$ son las coordenadas homogéneas del *punto del infinito* de la recta r.

Entonces llamaremos punto del infinito del espacio afín E_3 a todo punto cuya primera coordenada homogénea sea nula.

Puesto que dos rectas paralelas tienen vectores de dirección proporcionales, las coordenadas homogéneas de sus puntos del infinito también lo serán, luego representan el mismo punto. En lugar de decir que dos rectas son paralelas, o que tienen la misma dirección, ahora podemos decir que tienen el mismo punto del infinito.

El conjunto de los puntos del infinito del espacio está caracterizado por la ecuación

$$X_0=0.$$

A este conjunto le llamaremos *plano del infinito* de E_3. A los puntos del infinito les llamaremos puntos *impropios* y a los ordinarios puntos *propios*.

Ecuación homogénea de la recta en el espacio.

Al igual que se razonó para el caso del plano, se razonaría que la recta del espacio determinada por los puntos P y Q tiene por ecuaciones paramétricas homogéneas las siguientes:

$$(194)\qquad \begin{cases} X_0=\lambda P_0+\mu Q_0 \\ X_1=\lambda P_1+\mu Q_1 \\ X_2=\lambda P_2+\mu Q_2 \end{cases}$$

Lo que en forma matricial se puede escribir de la siguiente manera:

$$(195)\qquad r\equiv X=\lambda P+\mu Q.$$

ECUACIÓN HOMOGÉNEA DEL PLANO.

Es fácil comprobar que la ecuación homogénea del plano es

$$U_0X_0+U_1X_1+U_2X_2+U_3X_3=0. \tag{196}$$

Llamaremos recta del infinito del plano (196) a la intersección de éste con el plano del infinito. Por tanto, dicha recta vendrá dada por el sistema

$$\begin{cases} U_0X_0+U_1X_1+U_2X_2+U_3X_3=0 \\ X_0=0. \end{cases} \tag{197}$$

dicho sistema es equivalente al

$$\begin{cases} U_1X_1+U_2X_2+U_3X_3=0 \\ X_0=0. \end{cases}$$

PUNTOS IMAGINARIOS.

Llamaremos puntos imaginarios del espacio los representados por coordenadas homogéneas tales que al menos una de ellas sea imaginaria. De acuerdo con esto, el espacio se compone de puntos propios, reales o imaginarios y puntos impropios que también pueden ser reales o imaginarios. Dos puntos se dirán imaginarios conjugados cuando sus coordenadas homogéneas respectivas lo sean.

Al igual que se vio en el plano, se puede comprobar que para que la distancia entre dos puntos del espacio (naturalmente imaginarios) sea nula, es necesario que si v es un vector de dirección de la recta que les une, se verifique la relación

$$v_1^2+v_2^2+v_3^2=0.$$

Se ha supuesto el sistema de referencia métrico. A las rectas que tienen esta dirección se les llama *rectas isótropas*. Por cada punto del espacio pasa una simple infinidad de rectas isótropas y a este conjunto de rectas se le llama *cono isótropo* de vértice el punto en cuestión. Si las coordenadas homogéneas de este vértice son P_0, P_1, P_2, P_3 la ecuación del cono isótropo será

$$(P_0X_1-P_1X_0)^2+(P_0X_2-P_2X_0)^2+(P_0X_3-P_3X_0)^2=0. \tag{198}$$

A la intersección de esta cuádrica con el plano del infinito

$$\begin{cases} X_1^2+X_2^2+X_3^2=0 \\ X_0=0 \end{cases}$$

se le llama *círculo absoluto.*

Las intersecciones de la recta del infinito de un plano con el círculo absoluto son los puntos cíclicos de dicho plano.

EJEMPLO 1. El plano $3X_0+2X_1-X_2+4X_3=0$ tiene por recta del infinito la

$$\begin{cases} 2X_1-X_2+4X_3=0 \\ X_0=0 \end{cases}$$

Y los puntos cíclicos de este plano son $(0,\ -8\pm i\sqrt{21},\ 5)$.

EJERCICIOS

1. Compruébese que la condición necesaria y suficiente para que dos rectas del espacio sean perpendiculares es que sus puntos del infinito sean conjugados respecto al círculo absoluto.

2. Demuéstrese que la condición necesaria y suficiente para que una recta sea perpendicular a un plano es que el punto del infinito de la recta sea polo de la recta del infinito del plano respecto al círculo absoluto.

3. Demuéstrese que la condición necesaria y suficiente para que dos planos sean perpendiculares es que sus rectas del infinito sean conjugadas respecto al círculo absoluto.

4. Demuéstrese que todas las superficies esféricas del espacio contienen al círculo absoluto.

5. Hállese la ecuación de todos los planos que pasan por el punto del infinito de la recta determinada por los puntos P (4, 3, −1, 0) y Q (7, 2, −2, 1).

22.2. Posición relativa de una recta y una cuádrica.

La ecuación de una cuádrica en coordenadas homogéneas será:

$$a_{00}X_0^2+2a_{01}X_0X_1+2a_{02}X_0X_2+2a_{03}X_0X_3+a_{11}X_1^2+2a_{12}X_1X_2+ \\ +2a_{13}X_1X_3+a_{22}X_2^2+2a_{23}X_2X_3+a_{33}X_3^2=0,$$

o, en forma matricial,

$$XAX'=0.$$

Donde

$$X=(X_0 \quad X_1 \quad X_2 \quad X_3)$$

es la matriz de coordenadas homogéneas y

$$A=\begin{pmatrix} a_{oo} & a_{o1} & a_{o2} & a_{o3} \\ a_{o1} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{o2} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{o3} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

es la matriz de la cuádrica respecto al sistema de referencia escogido.

Si r es la recta determinada por los puntos P y Q, las coordenadas homogéneas de los puntos de intersección de la recta y de la cónica serán las soluciones del sistema

$$\begin{cases} XAX'=0 \\ X=\lambda P+\mu Q, \end{cases}$$

pero este sistema es equivalente al

$$\begin{cases} (PAP')\lambda^2+2(PAQ')\lambda\mu+(QAQ')\mu^2=0 \\ X=\lambda P+\mu Q. \end{cases} \tag{199}$$

Para hallar las coordenadas homogéneas de los puntos comunes a la cuádrica y a la recta, se resolvería la ecuación de segundo grado del sistema anterior y sus soluciones se llevarían a la ecuación siguiente. Pueden ocurrir los siguientes casos:

1.° Que dicha ecuación de segundo grado sea idénticamente nula, es decir, que $PAP'=0$, $PAQ'=0$ y $QAQ'=0$. Entonces toda pareja de números reales es solución de dicha ecuación y, por tanto, todos los puntos de la recta pertenecen a la cuádrica o, lo que es lo mismo, la recta está contenida totalmente en la cuádrica.

2.° Que $(PAQ')^2-(PAP')(QAQ')>0$. La ecuación de segundo grado tiene dos raíces reales distintas, lo que equivale a decir que la recta y la cuádrica tienen comunes dos puntos reales distintos. Se dice que la recta es *secante* a la cuádrica.

3.° Que $(PAQ')^2-(PAP')(QAQ')=0$. La ecuación admite una raíz real doble y, por tanto, existe un único punto (contado dos veces) común a la recta y a la cuádrica. Se dice que la recta es *tangente* a la cuádrica.

4.° Que $(PAQ')^2-(PAP')(QAQ')<0$. Las raíces de la ecuación son imaginarias conjugadas. La recta y la cuádrica tienen dos puntos imaginarios conjugados comunes. Se dice que la recta es *exterior* a la cuádrica.

EJEMPLO 1. La recta determinada por los puntos P (1, 1, 0, 2) y Q (0, 1, 0, −1) pertenece a la cuádrica

$$-3X_oX_2-24X_oX_3+16X_1X_2+8X_1X_3-29X_2X_3+8X_3^2=0,$$

ya que

$$PAP'=0, \quad PAQ'=0 \quad \text{y} \quad QAQ'=0.$$

PLANO TANGENTE A UNA CÓNICA POR UN PUNTO DE ÉSTA.

Supongamos que el punto P pertenece a la cuádrica $\mathcal{C}$. Entonces $PAP'=0$ y la primera ecuación de (199) se reduce a

$$2(PAQ')\lambda\mu+(QAQ')\mu^2=0, \tag{200}$$

que tiene una raíz $\lambda=1$, $\mu=0$, la cual da el punto de intersección P, cosa que ya sabíamos. El otro punto de intersección se obtendrá llevando a la segunda ecuación de (199) la otra raíz de (200):

$$\frac{\mu}{\lambda}=-\frac{2(PAQ')}{QAQ'}.$$

Si la recta r fuera tangente a la cuádrica, el segundo punto de intersección sería nuevamente P y, entonces,

$$\frac{2(PAQ')}{QAQ'}=0,$$

de donde $PAQ'=0$ es la condición que deben cumplir las matrices de coordenadas del punto P de tangencia y un segundo punto que junto con el P determine a la tangente. Pero este segundo punto puede ser cualquiera de r (distinto del P), luego la ecuación de todas las rectas tangentes a la cónica en el punto P será

$$PAX'=0, \tag{201}$$

la cual se puede escribir de las siguientes dos maneras:

$$f_{X_0}P_0+f_{X_1}P_1+f_{X_2}P_2+f_{X_3}P_3=0,$$

o

$$f_{P_0}X_0+f_{P_1}X_1+f_{P_2}X_2+f_{P_3}X_3=0,$$

donde f_{X_0}, f_{X_1}, f_{X_2}, f_{X_3} son las *formas lineales* asociadas a la cuádrica, que se definen de manera análoga a como se hizo en las cónicas.

La ecuación (201) es la ecuación de un plano: el plano *tangente* a la cuádrica en el punto P. Este plano estará indeterminado sólo en el caso de que las cuatro formas lineales asociadas a la cuádrica particularizadas para el punto P sean nulas. Más adelante veremos qué significado tiene este hecho.

EJEMPLO 2. El plano tangente a la cuádrica

$$\mathcal{C}\equiv X_0^2+2X_0X_1-6X_0X_3+2X_1^2+2X_1X_2-6X_1X_3+X_2^2-6X_2X_3+9X_3^2=0$$

en el punto P (3, 6, 6, 5) es el de ecuación

$$2X_0 - 2X_1 + X_2 = 0.$$

Posición relativa de un plano y una cuádrica.

Para facilitar este estudio elegiremos un sistema de referencia en el que el plano en cuestión tenga por ecuación $X_3 = 0$. La intersección de este plano y la cuádrica $\mathcal{C} \equiv XAX' = 0$ viene dada por el sistema

$$\begin{cases} XAX' = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases} \tag{202}$$

que es equivalente al

$$\begin{cases} a_{00}X_0^2 + 2a_{01}X_0X_1 + 2a_{02}X_0X_2 + a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases} \tag{203}$$

Pueden ocurrir dos casos:

1.° Que todos los coeficientes a_{ij} de la primera ecuación de (202) sean nulos, en cuyo caso la intersección es todo el plano de ecuación $X_3 = 0$, es decir, dicho plano pertenece a la cuádrica.

2.° Que algún coeficiente de la citada ecuación sea distinto de cero. Pero entonces la citada ecuación es la de una cónica en el plano $X_3 = 0$.

En resumen, un plano o pertenece a una cuádrica o la corta según una cónica.

Intersección del plano tangente a una cuádrica en un punto con la cuádrica.

Supongamos que el punto es un punto propio, con lo cual el plano no podrá ser el plano del infinito. Tomemos un sistema que tenga por origen el punto en cuestión y al plano tangente como plano $X_3 = 0$. De acuerdo con (201) la ecuación de dicho plano tangente será $PAX' = 0$, es decir,

$$a_{00}X_0 + a_{01}X_1 + a_{02}X_2 + a_{03}X_3 = 0,$$

pero este plano tiene que ser el plano $X_3 = 0$, luego

$$a_{00} = a_{01} = a_{02} = 0$$

y la intersección de la cuádrica y el plano tangente vendrá dada por

$$\begin{cases} a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + a_{22}X_2^2 = 0 \\ X_3 = 0, \end{cases} \tag{204}$$

pero ésta es la ecuación de una cónica degenerada en el plano $X_3=0$, cónica que será: dos rectas imaginarias no paralelas, dos rectas reales no paralelas o dos rectas reales confundidas, según que $a_{11}a_{22}-a_{12}$ sea mayor, menor o igual a cero. Según que ocurra cada uno de estos tres casos, al punto de tangencia P se le llama *elíptico, hiperbólico* o *parabólico,* respectivamente.

Ahora bien, el determinante de la matriz de la cuádrica respecto al sistema de referencia que hemos elegido es

$$|A| = -a_{03}^2(a_{11}a_{22}-a_{12}^2),$$

luego el elipsoide real, el hiperboloide elíptico y el paraboloide elíptico tienen todos sus puntos elípticos; el elipsoide imaginario, el hiperboloide hiperbólico y el paraboloide hiperbólico los tienen hiperbólicos, y las cuádricas degeneradas son de puntos parabólicos.

Ecuación del cono circunscrito a la cuádrica con vértice en un punto fijo.

Para que la recta r determinada por los puntos P y Q sea tangente a la cuádrica $\mathcal{C}\equiv XAX'=0$, la primera ecuación de (199) tiene que tener una raíz real doble, y para eso es necesario que

$$(PAQ')^2-(PAP')(QAQ')=0.$$

Y ésta sería la condición que deberían cumplir las matrices de coordenadas de los puntos P y Q que determinan la recta, para que ésta fuera tangente a la cuádrica. Ahora bien, si X es un punto cualquiera que cumple la condición

$$(PAX')^2-(PAP')(XAX')=0,$$

este punto junto con el P determina una recta tangente a la cuádrica. Entonces la ecuación anterior es la del conjunto de todos los puntos que están sobre tangentes a la cuádrica trazadas por P. Se puede comprobar que dicha ecuación es la de una cuádrica degenerada a la que se llama cono circunscrito a la cuádrica con vértice en el punto P. Si el punto P es un punto impropio, se trata de un cilindro en lugar de un cono. Dichos cono o cilindro pueden degenerar en un par de planos, distintos o confundidos.

EJERCICIOS

1. Hállese la ecuación del plano tangente a la cuádrica

$$\mathcal{C} \equiv 18X_0X_1+12X_0X_2+18X_0X_3-9X_1^2+6X_1X_2+2X_2^2+6X_2X_3-9X_3^2=0$$

en el origen de coordenadas y su intersección con la cuádrica.

2. Hállese el cono circunscrito a la cuádrica del ejercicio anterior, con vértice en el punto (1, 2, 0, 1).

3. Hállese el cilindro circunscrito a la cuádrica del ejercicio primero, de generatrices paralelas a la recta determinada por los puntos P (1, 1, 1, 1) y Q (2, 1, 4, 0).

4. Hállese el plano tangente a la cuádrica del ejercicio 1, paralelo al plano $3X_0+3X_1+4X_2-3X_3=0$.

22.3. Polaridad en las cuádricas.

Por consideraciones análogas a las efectuadas en el caso de las cónicas, se comprobaría que el lugar geométrico de los puntos X del espacio que separan armónicamente al punto P de los de intersección de la recta determinada por P y X con la cuádrica $\mathcal{C} \equiv XAX'=0$, tiene por ecuación

$$PAX'=0. \tag{205}$$

Esta es la ecuación de un plano, o de todo el espacio, según que alguno de sus coeficientes sea distinto de cero o no. En el primer caso, diremos que es el *plano polar* del punto P respecto a la cuádrica $\mathcal{C}$.

Los puntos de plano polar indeterminado tienen que cumplir las condiciones

$$f_{P_0}=f_{P_1}=f_{P_2}=f_{P_3}=0.$$

Luego, dichos puntos tendrán por coordenadas homogéneas las soluciones del sistema

$$XA=0.$$

Pero para que este sistema lineal homogéneo sea compatible, es necesario que $|A|=0$, es decir, las únicas cuádricas que dan lugar a puntos de plano polar indeterminado son las degeneradas. A los puntos del plano polar indeterminado respecto a una cuádrica, se les llama *puntos singulares* de la cuádrica. La demostración de que todo

punto singular de una cuádrica pertenece a la misma y de que toda recta determinada por un punto singular y otro punto cualquiera de la cuádrica está contenida en la cuádrica, es análoga a la efectuada en el caso de las cónicas.

Si la cuádrica $\mathcal{C} \equiv XAX' = 0$ es no degenerada, la aplicación que a cada punto del espacio le hace corresponder su plano polar respecto a $\mathcal{C}$ es biyectiva, siempre y cuando convengamos que el plano polar de un punto de la cuádrica es el plano tangente a la cuádrica en dicho punto.

Si

$$p \equiv U_0X_0 + U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3 = 0$$

es el plano polar del punto P (P_0, P_1, P_2, P_3) (al que llamaremos *polo de* p), se verifica

$$\lambda U = PA, \qquad \rho P = U(\text{adj } A) \tag{206}$$

que son las ecuaciones en forma matricial de la polaridad determinada por la cuádrica $\mathcal{C}$.

EJEMPLO 1. Las ecuaciones de la polaridad determinada por la cuádrica

$$2X_0X_1 + 2X_0X_2 - 2X_1X_3 + X_2^2 - X_3^2 = 0$$

tiene por ecuaciones:

$$\begin{array}{llll} \lambda U_0 = & P_1 + P_2 & & \rho P_0 = -U_0 + U_1 + U_2 - U_3 \\ \lambda U_1 = P_0 & - P_3 & & \rho P_1 = \ U_0 + U_1 - U_2 - U_3 \\ \lambda U_2 = P_0 & + P_2 & & \rho P_2 = \ U_0 - U_1 + U_2 + U_3 \\ \lambda U_3 = & -P_1 \quad - P_3 & & \rho P_3 = -U_0 - U_1 + U_2 - U_3 \end{array}$$

luego el plano polar del punto P $(3, 2, 0, -2)$ será

$$p \equiv 2X_0 + 5X_1 + 3X_2 = 0$$

y el polo del plano

$$X_0 + 2X_1 - X_2 + 5X_3 = 0$$

será el punto $(-5, -1, 3, -7)$.

Se dice que el punto Q es *conjugado* del P respecto a la cuádrica $\mathcal{C} \equiv XAX' = 0$ cuando Q pertenece al plano polar de P respecto a $\mathcal{C}$, es decir, cuando $PAQ' = 0$, pero entonces $QAP' = 0$ y el punto P pertenece al plano polar de Q respecto a $\mathcal{C}$, luego P es conjugado de Q. Se dice simplemente que son conjugados. La condición para que dos puntos P y Q sean conjugados respecto a la cuádrica $\mathcal{C}$ es que

$$PAQ' = QAP' = 0.$$

Entonces el conjunto de los planos polares de los puntos de un plano π que no sea tangente a la cuádrica pasan todos por el polo de dicho plano y, recíprocamente, todo plano de la radiación de vértice dicho polo tiene su polo sobre el plano π.

Sea $r \equiv X = \lambda P + \mu Q$ la recta determinada por los puntos P y Q. El plano polar de un punto cualquiera de r tiene por ecuación

$$(\lambda P + \mu Q) AX' = \lambda PAX' + \mu QAX' = 0,$$

pero ésta es la ecuación del haz de planos determinado por los planos $PAX' = 0$ y $QAX' = 0$, que son los planos polares de los puntos P y Q. A la arista de este haz se le llama *polar* de la recta r respecto a la cuádrica $\mathcal{C}$.

Es decir, el conjunto de los planos polares respecto a una cuádrica $\mathcal{C}$, de los puntos de una recta r, es un haz de planos a cuya arista r' se le llama polar de la recta r respecto a $\mathcal{C}$.

Veamos que la polar de r' respecto a $\mathcal{C}$ es r:

$$\text{si} \quad P^*, Q^* \in r' \Longrightarrow \begin{cases} P^*, Q^* \in p \equiv PAX' = 0 \\ P^*, Q^* \in q \equiv QAX' = 0 \end{cases},$$

luego sus planos polares p^* y q^* contendrán a P y Q y, por tanto, a la recta r. En resumen, la relación de polaridad entre rectas respecto a una cuádrica $\mathcal{C}$ es simétrica.

Se dice que la recta s es *conjugada* de la r, respecto a $\mathcal{C}$, cuando s corta a la polar r' de r respecto a $\mathcal{C}$. Esta relación es también simétrica. En efecto, si s es conjugada de r, el plano polar de $P = r' \cap s$ será un plano p tal que $r \in p$ y $s' \in p$, siendo s' la polar de s, luego al pertenecer r y s' a un mismo plano, se cortarán en un punto (propio o impropio) y, por tanto, r es conjugada de s.

Si r es conjugada de sí misma, es decir, si corta a su polar, se llama *autoconjugada.*

Si r es autoconjugada respecto a la cuádrica $\mathcal{C}$, el punto $P = r \cap r'$, es tal que su polar p contiene a r' como polar de r (a la que pertenece P) y a r como polar de r' (a la que pertenece P), luego P pertenece a su plano polar p y es, por tanto, autoconjugado (pertenece a $\mathcal{C}$) y p es el plano tangente a $\mathcal{C}$ en P. Las rectas r y r' son tangentes a $\mathcal{C}$ en P.

Recíprocamente, si r es tangente a $\mathcal{C}$ en P, entonces r es autoconjugada. En efecto, $r \in p$, siendo p el plano polar (tangente) de P respecto a $\mathcal{C}$; los planos polares de todos los puntos de p contienen a P, luego $P \in r'$ y r corta a r', luego es autoconjugada.

En resumen, *la condición necesaria y suficiente para que una recta sea autoconjugada respecto a una cuádrica* $\mathcal{C}$, *es que* r *sea tangente a* $\mathcal{C}$.

Cuando una recta coincide con su polar se llama *autopolar.* Si una recta es autopolar respecto a una cuádrica $\mathcal{C}$, todos sus puntos son autoconjugados y, por tanto, toda la recta pertenece a la cuádrica.

Se dice que el plano q es *conjugado* del plano p respecto a una cuádrica $\mathcal{C}$, cuando q contiene al polo P de p respecto a $\mathcal{C}$. De acuerdo con la segunda ecuación de (206), si el plano

$$q \equiv V_0X_0 + V_1X_1 + V_2X_2 + V_3X_3 = 0$$

es conjugado del

$$p \equiv U_0X_0 + U_1X_1 + U_2X_2 + U_3X_3 = 0,$$

respecto a la cuádrica $\mathcal{C} \equiv XAX' = 0$, se tiene que verificar

$$V\ (\text{adj}\ A)\ U' = 0, \tag{207}$$

pero entonces

$$U\ (\text{adj}\ A)\ V' = 0 \tag{207'}$$

con lo que p es conjugado de q. Se dice simplemente que son conjugados.

Se dice que un plano es *autoconjugado* respecto a la cuádrica $\mathcal{C}$ cuando contiene a su polo P; pero entonces P pertenece a la cuádrica y p es tangente a ella. Si p es autoconjugado

$$U\ (\text{adj}\ A)\ U' = 0 \tag{208}$$

que es la llamada ecuación *tangencial* de la cuádrica.

EJEMPLO 2. Sea la cuádrica del ejemplo 1. La polar de la recta determinada por los puntos P (1, 2, 0, 1) y Q (1, 0, 0, 1) es la recta

$$r' \equiv \begin{cases} PAX' \equiv 2X_0 + X_2 - X_3 = 0 \\ QAX' \equiv \quad X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

y su ecuación tangencial es

$$-U_0^2 - 2U_0U_1 - 2U_0U_2 + 2U_0U_3 - U_1^2 + 2U_1U_2 + \\ + 2U_1U_3 - U_2^2 - 2U_2U_3 - U_3^2 = 0.$$

Dada una cuádrica $\mathcal{C}$ y una recta r que no sea tangente a $\mathcal{C}$, la correspondencia que a cada punto P de r le asocia su conjugado $P = p \cap r$ es una involución. En efecto, si r está determinada por los puntos P y Q

$$r \equiv X = \lambda_0 P + \lambda_1 Q,$$

entonces, si $\bar{P}=\bar{\lambda}_0 P+\bar{\lambda}_1 Q$ y $\bar{\bar{P}}=\bar{\bar{\lambda}}_0 P+\bar{\bar{\lambda}}_1 Q$ son conjugados

$$(209)\qquad PA\bar{\bar{P}}'=(PAP')\bar{\lambda}_0\bar{\bar{\lambda}}_0+(PAQ')(\bar{\lambda}_0\bar{\bar{\lambda}}_1+\bar{\lambda}_1\bar{\bar{\lambda}}_0)+(QAQ')\bar{\lambda}_1\bar{\bar{\lambda}}_1=0,$$

que es la ecuación de una involución.

Los puntos dobles de esta involución son puntos autoconjugados, luego serán los puntos de intersección de r y $\mathcal{C}$.

De manera análoga se vería que la correspondencia que a cada plano $\bar{p}\equiv\bar{U}X'=0$ del haz de planos

$$Z=\mu_0 U+\mu_1 V$$

le asocia su conjugado $\bar{\bar{p}}\equiv\bar{\bar{U}}X'=0$ en el mismo haz (se supone la arista r del haz no tangente a la cuádrica) es una involución, cuya ecuación es

$$(U\ \text{adj}\ A\ U')\bar{\mu}_0\bar{\bar{\mu}}_0+(U\ \text{adj}\ A\ V')(\bar{\mu}_0\bar{\bar{\mu}}_1+\bar{\mu}_1\bar{\bar{\mu}}_0)+$$
$$+(V\ \text{adj}\ V')\bar{\mu}_1\bar{\bar{\mu}}_1=0.$$

Los planos dobles de esta involución son los planos tangentes a la cuádrica trazados por la arista r del haz.

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que los conos no poseen más que un punto singular, y que éste es propio y es el vértice.

2. Demuéstrese que los cilindros no poseen más que un punto singular, que éste es impropio y que los cilindros se componen de rectas cuyo punto del infinito es dicho punto singular.

3. Hállese la ecuación de la involución de planos conjugados subordinada por la polaridad definida por la cuádrica

$$\mathcal{C}\equiv X_0X_1+X_2^2-2X_3^2=0,$$

sobre el haz de arista la recta

$$r\equiv\begin{cases}2X_0-X_2+X_3=0\\3X_0-X_1-2X_2=0\end{cases}$$

y los planos dobles de dicha involución.

4. Demuéstrese que por una recta r no perteneciente a una cuádrica $\mathcal{C}$ se pueden trazar a ésta dos planos tangentes.

5. Hállense los puntos de contacto de los planos tangentes a la cuádrica

$$2X_oX_1+4X_1X_2+X_2^2+2X_3^2=0$$

por la recta

$$r\equiv\begin{cases}X_o+X_1+X_2-X_3=0.\\ X_1\qquad\quad +X_3=0\end{cases}$$

22.4. Centros, planos diametrales, diámetros, planos principales y ejes de una cuádrica.

Se llaman *centros* de una cuádrica $\mathcal{C}\equiv XAX'=0$ a los polos del plano del infinito cuando no son autoconjugados.

El plano polar p del punto P respecto a $\mathcal{C}$ es $PAX'=0$, es decir,

$$p\equiv f_{P_o}X_o+f_{P_1}X_1+f_{P_2}X_2+f_{P_3}X_3=0.$$

Si P fuera polo del plano del infinito $X_o=0$, entonces

$$f_{P_1}=f_{P_2}=f_{P_3}=0,$$

luego el sistema

$$\begin{aligned}a_{o1}x_o+a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=0\\ a_{o2}x_o+a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=0\\ a_{o3}x_o+a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3&=0\end{aligned}\qquad(210)$$

tiene por soluciones las coordenadas homogéneas de los polos del plano del infinito. Pueden ocurrir los siguientes casos:

1.° Que el rango de la matriz del sistema sea 3. En este caso el sistema es, desde el punto de vista geométrico, compatible y determinado. Su única solución (única salvo un coeficiente de proporcionalidad)

$$\frac{x_o}{A_{oo}}=\frac{x_1}{A_{o1}}=\frac{x_2}{A_{o2}}=\frac{x_3}{A_{o3}},$$

nos da el polo del plano del infinito. Punto que será centro o no, según que $A_{oo}\neq 0$ o $A_{oo}=0$.

Están en este caso:

a) Las cuádricas no degeneradas, pues al ser $|A|\neq 0$ no puede ser

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}a_{o1}&a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{o2}&a_{12}&a_{22}&a_{23}\\ a_{o3}&a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}<3.$$

En los elipsoides e hiperboloides $A_{oo} \neq 0$, luego éstas tienen centro único. En los paraboloides $A_{oo}=0$, por tanto, los paraboloides no tienen centro.

b) Los conos, en los que por ser $A_{oo} \neq 0$ hay un solo centro, el cual es el único punto singular, es decir, el vértice del cono. En efecto, el sistema (210) es un subsistema del sistema que daba los puntos singulares, luego toda solución del segundo lo es del primero.

2.° Si el rango de la matriz del sistema es 2, el sistema es equivalente al formado por dos de sus tres ecuaciones, luego habrá una recta de polos del plano del infinito, que será de centros o no, según que dicha recta sea propia o impropia.

En el caso de ser propia dicha recta,

$$r \equiv \begin{cases} a_{01}X_0 + a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = 0 \\ a_{02}X_0 + a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = 0 \end{cases}$$

tomándola como eje $\begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$ de un nuevo sistema de referencia, tendríamos

$$a_{01} = a_{02} = a_{03} = a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0 \quad \text{y} \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$$

y la cuádrica tendría por ecuación

$$\mathcal{C} \equiv X \begin{pmatrix} a_{oo} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X' = 0$$

que será un cilindro no parabólico o un par de planos no paralelos según que $a_{oo} \neq 0$ o $a_{oo}=0$. Luego dichas cuádricas tienen una recta de centros.

Si r pertenece al plano del infinito, tomándola como recta $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \end{cases}$ de un nuevo sistema tendremos

$$a_{12} = a_{22} = a_{23} = a_{13} = a_{33} = 0, \quad a_{02} \neq 0, \quad a_{11} \neq 0$$

y

$$\mathcal{C} \equiv X \begin{pmatrix} a_{oo} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & 0 & 0 \\ a_{02} & 0 & 0 & 0 \\ a_{03} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X' = 0$$

luego $\mathcal{C}$ es un cilindro parabólico. Los cilindros parabólicos no tienen centro.

3.° Si el rango de la matriz del sistema es 1, dicho sistema es

equivalente al formado por una sola de sus ecuaciones. Existe, por tanto, un plano de polos del plano del infinito, el

$$a_{o1}X_o + a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{22}X_3 = 0,$$

el cual será de centros o no según que sea propio o impropio.

En el primer caso, tomándolo como plano $X_1 = 0$ de un nuevo sistema, tendremos

$$a_{o1} = a_{o2} = a_{o3} = a_{12} = a_{22} = a_{23} = a_{13} = a_{33} = 0 \quad \text{y} \quad a_{11} \neq 0$$

luego

$$\mathcal{C} \equiv X \begin{pmatrix} a_{oo} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X' = 0$$

que representa un par de planos paralelos o confundidos, por tanto, dichas cuádricas poseen un plano de centros.

En el segundo caso

$$a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{23} = a_{13} = a_{33} = 0$$

y

$$\mathcal{C} \equiv X \begin{pmatrix} a_{oo} & a_{o1} & a_{o2} & a_{o3} \\ a_{o1} & 0 & 0 & 0 \\ a_{o2} & 0 & 0 & 0 \\ a_{o3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X' = 0$$

y la cuádrica se compone del plano del infinito y otro plano.

4.° Si el rango de la matriz del sistema es cero, cualquier punto del espacio es solución de (210), pero en este caso

$$a_{o1} = a_{o2} = a_{o3} = a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{22} = a_{23} = a_{33} = 0$$

luego

$$\mathcal{C} \equiv X_o^2 = 0$$

y, por tanto, la única cuádrica que tiene por centro cualquier punto del espacio es la formada por el plano del infinito contado dos veces.

EJEMPLO 1. El centro de la cuádrica

$$4X_oX_1 - 2X_oX_3 - 8X_1X_2 - 2X_2^2 + 6X_2X_3 + 10X_3^2 = 0$$

es el punto $(80, -23, 40, -4)$.

PLANOS DIAMETRALES, PLANOS ASINTÓTICOS, DIÁMETROS, ASÍNTOTAS.

Se llaman *planos diametrales* de una cuádrica $\mathcal{C}$ a los planos polares del plano del infinito cuando no son autoconjugados, en cuyo caso se les llama *planos asintóticos.*

Si $P(0, P_1, P_2, P_3)$ es un punto del infinito, su plano polar respecto a $\mathcal{C} \equiv XAX' = 0$ es

$$p \equiv f_{X_1} P_1 + f_{X_2} P_2 + f_{X_3} P_3 = 0 \tag{211}$$

o bien

$$p \equiv f_{P_0} X_0 + f_{P_1} X_1 + f_{P_2} X_2 + f_{P_3} X_3 = 0 \tag{211'}$$

y p será un plano diametral o un plano asintótico, según que $P \notin p$ o $P \in p$. En el segundo caso

$$f_{P_1} P_1 + f_{P_2} P_2 + f_{P_3} P_3 = 0. \tag{212}$$

La ecuación (211) nos dice que los planos diametrales y los asintóticos pasan por los polos del plano del infinito (cosa que ya sabíamos) y, por tanto, por los centros de la cuádrica, cuando éstos existen. En consecuencia:

Los planos diametrales y asintóticos de una cuádrica con centro constituyen una radiación de planos de vértice el centro de la cuádrica.

Los planos diametrales de un paraboloide constituyen una radiación impropia de planos, cuyo vértice es el punto impropio del paraboloide.

Los planos diametrales y asintóticos de un cilindro no parabólico o de un par de planos no paralelos, constituyen un haz de planos cuya arista es la recta de centros.

En los cilindros parabólicos los planos diametrales constituyen un haz impropio de planos.

En la cuádrica formada por un par de planos paralelos distintos o confundidos no hay más que un plano diametral.

Al polo de un plano diametral p se le llama también *dirección conjugada* de dicho plano y a las rectas que pasan por él *rectas conjugadas* de p.

Todo plano diametral es plano de simetría de las cuerdas que tienen su dirección conjugada.

Es consecuencia de la definición de plano polar y de que el conjugado armónico de un punto del infinito respecto a otros dos, es el punto medio del segmento por ellos determinado.

Se llaman *diámetros* de una cuádrica $\mathcal{C}$ a las polares de las rectas del infinito, cuando no son autoconjugadas, si lo son se las llama *asíntotas* si son propias.

La recta impropia r determinada por los puntos P $(0, P_1, P_2, P_3)$ y Q $(0, Q_1, Q_3, Q_3)$ tiene por recta polar a

$$r' \equiv \begin{cases} f_{P_0}X_0 + f_{P_1}X_1 + f_{P_2}X_2 + f_{P_3}X_3 = 0 \\ f_{Q_0}X_0 + f_{Q_1}X_1 + f_{Q_2}X_2 + f_{Q_3}X_3 = 0 \end{cases} \tag{213}$$

y si dicha recta es impropia, será diámetro o asíntota según que $r \cap r' = \phi$ o $r \cap r' \neq \phi$.

Según (213), r' es intersección de dos planos polares de dos puntos del infinito, luego todos los diámetros y asíntotas de una cuádrica pasan por los polos del plano del infinito y, por tanto, por los centros de la cuádrica, si existen. En consecuencia:

Los diámetros y asíntotas de una cuádrica con centro forman una radiación de rectas de vértice el centro.

Los diámetros de los paraboloides forman una radiación impropia de rectas de vértice el punto impropio de la cuádrica. Son, por tanto, paralelos.

Los cilindros no parabólicos y pares de planos no paralelos no tienen más que un diámetro, la recta de centros.

En los cilindros parabólicos no hay diámetro.

Toda recta del plano de centros de la cuádrica constituida por un par de planos paralelos es un diámetro.

A la recta polar impropia de un diámetro se le llama *orientación conjugada* de dicho diámetro y *planos conjugados* a los que tienen esta orientación.

Todo diámetro de una cuádrica es eje de simetría respecto de las cuerdas paralelas a sus planos conjugados y contiene, por tanto, a los centros de las cónicas intersección de la cuádrica con los planos conjugados del mismo.

Es consecuencia de la definición de polar de una recta y de que el conjugado armónico de un punto del infinito respecto a otros dos, es el punto medio del segmento determinado por ambos.

Se llama *cono asintótico* de una cuádrica con centro a la superficie que se obtiene al proyectar desde el centro la cónica del infi-

nito de dicha cuádrica, es decir, su intersección con el plano del infinito. El cono asintótico está, por tanto, constituido por las asíntotas a la cuádrica.

Sea C $(A_{oo}, A_{o1}, A_{o2}, A_{o3})$ el centro de la cuádrica

$$\mathcal{C} \equiv XAX' = 0.$$

El cono circunscrito a la cuádrica con vértice C es

$$(CAX')^2 - (CAC')(XAX') = 0;$$

ahora bien,

$$CAX' = f_{C_o}X_o + f_{C_1}X_1 + f_{C_2}X_2 + f_{C_3}X_3 = f_{C_o}X_o =$$
$$= (a_{oo}A_{oo} + a_{o1}A_{o1} + a_{o2}A_{o2} + a_{o3}A_{o3})X_o = |A| X_o,$$

puesto que por ser C el centro de $\mathcal{C}$,

$$f_{C_1} = f_{C_2} = f_{C_3} = 0.$$

Por razones análogas

$$CAC' = |A| A_{oo},$$

luego la ecuación del cono asintótico será:

$$XAX' - \frac{|A|}{A_{oo}} X_o^2 = 0. \tag{214}$$

EJEMPLO 2. Dada la cuádrica

$$\mathcal{C} \equiv 16X_o^2 - 8X_oX_1 - 8X_oX_2 - 8X_oX_3 + 2X_1^2 + 2X_1X_2 +$$
$$+ 2X_1X_3 + 2X_2^2 + 2X_2X_3 + 2X_3^2 = 0,$$

el plano diametral correspondiente al punto P (0, 0, 0, 1) es el

$$-4X_o + X_1 + X_2 + 2X_3 = 0.$$

El diámetro correspondiente a la recta PQ, Q (0, 1, 0, 0) es

$$r' \equiv \begin{cases} -4X_o + X_1 + X_2 + 2X_3 = 0 \\ -4X_o + 2X_1 + X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

El cono asintótico es el

$$XAX' - \frac{16}{6} X_o^2,$$

es decir, el

$$80X_o^2 - 48X_oX_1 - 48X_oX_2 - 48X_oX_3 + 12X_1^2 + 12X_1X_2 +$$
$$+ 12X_1X_3 + 12X_2^2 + 12X_2X_3 + 12X_3^2 = 0.$$

Se llaman *planos principales* de una cuádrica a los planos diametrales que son perpendiculares a sus rectas conjugadas.

Se llama *eje* de una cuádrica a todo diámetro de la misma perpendicular a sus planos conjugados.

La intersección e de dos planos principales p y q es un eje de la cuádrica. En efecto, la recta polar (impropia) de e contiene a los polos P y Q (impropios) de p y q; p es perpendicular a todas las rectas que pasan por P y q a todas las rectas que pasan por Q; todo plano conjugado de e contiene una recta que pasa por P y otra que pasa por Q y e, por estar contenida en p y q es perpendicular a ambas rectas, luego es un eje. Recíprocamente, si e es un eje, es perpendicular a todos sus planos conjugados, los cuales tienen por recta del infinito a la polar e' de e; en la involución de planos conjugados del haz de arista e, habrá al menos dos conjugados perpendiculares p y q; p es perpendicular a q y a todos sus planos paralelos, pero la recta del infinito de todos estos planos corta a e' en P (polo de p); toda recta que pasa por P (conjugada de p) se puede considerar como intersección de un plano paralelo a q y de un plano conjugado de e, luego es perpendicular a p y éste es un plano principal. De manera análoga razonaríamos que q es principal.

En lo que sigue se supondrá siempre el sistema de referencia métrico.

Sea $P\ (0,\ P_1,\ P_2,\ P_3)$ un punto impropio tal que su plano polar p (diametral) respecto a la cuádrica $\mathcal{C}\equiv XAX'=0$ sea principal. Entonces

$$p\equiv f_{P_0}X_0+f_{P_1}X_1+f_{P_2}X_2+f_{P_3}X_3=0$$

tiene que ser perpendicular a todas las rectas que pasan por P. Pero estas rectas tienen como uno de sus vcetores de dirección al $v=(P_1,\ P_2,\ P_3)$, luego

$$\frac{f_{P_1}}{P_1}=\frac{f_{P_2}}{P_2}=\frac{f_{P_3}}{P_3}$$

y llamando λ al valor común de estas razones

$$\begin{aligned}a_{11}P_1+a_{12}P_2+a_{13}P_3&=\lambda P_1\\ a_{12}P_1+a_{22}P_2+a_{23}P_3&=\lambda P_2\\ a_{13}P_1+a_{23}P_2+a_{33}P_3&=\lambda P_3\end{aligned}$$

luego el sistema

$$\text{(215)}\qquad\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)x_1+\ a_{12}x_2+\ a_{13}x_3&=0\\ a_{12}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\ a_{23}x_3&=0\\ a_{13}x_1+\ a_{23}x_2+(a_{33}-\lambda)x_3&=0\end{aligned}$$

nos da los puntos del infinito que tienen planos polares que son planos principales.

Para que el sistema anterior tenga solución es necesario que

$$|A_o - \lambda I| = 0, \tag{216}$$

pero ésta es la ecuación característica de la cuádrica que, como sabemos, tiene sus tres raíces reales.

Si λ_1 es una de las raíces de (216) y (P_1, P_2, P_3) es una de las soluciones del sistema que se obtiene poniendo λ_1 en lugar de λ en (215), la ecuación del plano principal correspondiente será

$$(a_{o1}P_1 + a_{o2}P_2 + a_{o3}P_3)X_o + \lambda_1 P_1 X_1 + \lambda_1 P_2 X_2 + \lambda_1 P_3 X_3 = 0. \tag{217}$$

De acuerdo con el teorema 2 de [18.4], los planos principales correspondientes a dos raíces distintas de (216) son perpendiculares.

Se demuestra que la suma del orden de multiplicidad de una raíz de (216) y el rango del sistema (215) correspondiente a dicha raíz es 3.

Los planos principales son planos de simetría ortogonal de la cuádrica, y los diámetros ejes de simetría ortogonal.

En las cuádricas con centro las tres raíces de (216) son distintas de cero. Pueden ocurrir los siguientes casos:

a) Que sean las tres distintas, en cuyo caso a cada una le corresponde un plano principal distinto, los cuales forman un triedro trirrectángulo.

b) Que una raíz de (216) sea doble, en cuyo caso el sistema correspondiente es de rango 1 y las soluciones del mismo forman un espacio vectorial de dimensión 2, y existe, por tanto, un haz de planos principales. A la otra raíz corresponde un plano principal que es perpendicular a todos los anteriores y, por tanto, a su arista. Esta arista y las intersecciones de cada uno de los planos del haz con el último plano, son los ejes de la cuádrica. La intersección de la cuádrica con cualquier plano perpendicular al primer eje es una circunferencia. Se dice que la cuádrica es de revolución.

c) (216) tiene una raíz triple. El sistema (215) es de rango cero, luego todo plano diametral es plano principal y todo diámetro eje. La cuádrica es una superficie esférica.

En los paraboloides, la raíz $\lambda = 0$ de (216) corresponde al plano del infinito que no es diametral y, por tanto, no puede ser principal. Las otras dos raíces son distintas de cero y puede ocurrir:

a) Que sean distintas, en cuyo caso el paraboloide no tiene más que dos planos principales perpendiculares y un solo eje, su intersección.

b) Que sean iguales. El paraboloide tiene un haz de planos principales y un solo eje, la arista de dicho haz. El paraboloide es de revolución.

En los cilindros no parabólicos y planos no paralelos habrá dos planos principales o un haz de planos principales (y en ambos casos un solo eje) según que las dos raíces no nulas de (216) sean distintas o confundidas.

En los cilindros parabólicos y pares de planos paralelos habrá un solo plano principal, correspondiente a la única raíz no nula de (216).

EJEMPLO 3. Sea la cuádrica

$$\mathcal{C}\equiv 10X_0^2-2X_0X_2+4X_0X_3+X_1^2-2X_2X_3=0$$

$$A_0=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad |A_0-\lambda I|=-\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1=0,$$
$$\lambda_1=1 \text{ doble},\quad \lambda_2=-1.$$

Para

$$\lambda=1\Longrightarrow\begin{cases}-P_2-P_3=0\\ -P_2-P_3=0\end{cases}\Longrightarrow P_2=-P_3\Longrightarrow (P_1,\ -P_3,\ P_3)$$
$$P_3(3X_0-X_2+X_3)+P_1X_1=0,$$

luego todos los planos del haz determinado por los planos

$$3X_0-X_2+X_3=0 \quad \text{y} \quad X_1=0,$$

son principales.

Para

$$\lambda=-1\Longrightarrow\begin{cases}2P_1=0\\ P_2-P_3=0\\ -P_2+P_3=0\end{cases}\Longrightarrow (0,\ P_2,\ P_2)$$

luego $X_0-X_2-X_3=0$ es el otro plano principal. La cuádrica es de revolución.

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que el centro de una cuádrica con centro es centro de simetría de la misma.

2. Hállense las ecuaciones del diámetro conjugado con el plano

$$X_1+2X_2-4X_3=0$$

respecto a la cuádrica

$$\mathcal{C}\equiv -7X_0^2-2X_0X_1+2X_0X_2+2X_1X_2-2X_1X_3+X_2X_3=0.$$

Centro de la cuádrica.

3. Hállense los ejes y los planos principales de la cuádrica

$$\mathcal{C} \equiv 2X_0^2 - 2X_0X_1 - 4X_0X_2 - 4X_0X_3 + X_1^2 + 2X_2^2 + 2X_3^2 = 0.$$

4. Hállense las ecuaciones de los paraboloides no degenerados que pasan por las cónicas de intersección de la cuádrica

$$\mathcal{C} \equiv -2X_0^2 + X_0X_1 - X_0X_2 + X_2^2 - 2X_3^2 = 0$$

con los planos

$$2X_0 - X_1 + X_3 = 0 \quad \text{y} \quad 2X_1 - X_2 = 0.$$

5. Hállese la ecuación de la cuádrica que tiene por cónica del infinito la de la cuádrica

$$\mathcal{C} \equiv 4X_0X_1 + 2X_0X_2 + 3X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 = 0$$

y respecto de la cual son conjugados los puntos (1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0), siendo P (1, 0, 0, 1) el polo del plano $X_0 - X_1 + X_3 = 0$.

6. Clasifíquese la cónica intersección de la cuádrica

$$X_0^2 - 6X_0X_1 + 4X_0X_3 - X_1^2 + 2X_1X_2 + X_3^2 = 0$$

con el plano

$$2X_0 - X_1 + X_2 - X_3 = 0.$$

JAR'23

23

Curvas planas

23.1. Concepto de curva plana.

Se llama *arco de curva plana* γ a la imagen de una aplicación $\varphi\colon I \longrightarrow E_2$ de un intervalo $I \subset R$ en el plano euclídeo E_2.

Si $\{O;\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2\}$ es un sistema de referencia (que supondremos siempre métrico), un arco de curva plana puede venir dado de la siguiente forma

$$\gamma = \{(x_1,\ x_2) \in E_2 \mid x_1 = f_1(t),\quad x_2 = f_2(t),\quad t \in I\}$$

si $I = [a,\ b]$ a

$$\gamma \equiv \begin{cases} x_1 = f_1(t) \\ x_2 = f_2(t) \end{cases} \qquad a \leq t \leq b \tag{218}$$

les llamaremos *ecuaciones paramétricas* del arco de curva.

La aplicación φ no tiene por qué ser inyectiva, es decir, pueden existir distintos valores del parámetro t a los que corresponda el mismo punto de γ.

El intervalo I puede ser cerrado, abierto, o semiabierto por uno u otro extremo. Si es cerrado, al punto $(f_1(a),\ f_2(a))$ se le llama *origen* del arco y al $(f_1(b),\ f_2(b))$ se le llama *extremo*. Si $f_1(a) = f_1(b)$ y $f_2(a) = f_2(b)$, se dice que el arco es *cerrado*.

Si no se impone ninguna restricción a las funciones f_1 y f_2, γ podría ser un conjunto de puntos de E_2 que no tuviera ningún parecido con lo que se entiende intuitivamente por curva. A Peano se debe un ejemplo de aplicación de un intervalo I en E_2 en el que la imagen es el conjunto de todos los puntos interiores a un cuadrado. Parece, pues, conveniente limitar las funciones f_1 y f_2 para que los arcos de curva γ se ajusten a la idea intuitiva que de ellos tenemos.

Si las funciones f_1 y f_2 son continuas y tales que la aplicación φ es biyectiva, se le llama a γ *arco simple* o *arco de Jordán*.

La imagen C de una aplicación $\varphi\colon I \longrightarrow E_2$ continua, se llama *curva plana,* si para cada punto $P \subset C$ existe un círculo K de centro

P, tal que en $K \cap C$ haya a lo sumo un número finito de arcos de Jordan que pasen por P.

Estaremos interesados en curvas definidas por funciones f_1 y f_2 continuas y desarrollables por la fórmula de Taylor en casi todos sus puntos (es decir, en todos salvo un número finito).

Puesto que los puntos del plano E_2 dependen de dos parámetros (sus coordenadas), para caracterizar un subconjunto de puntos de E_2 que dependa de un solo parámetro, se puede imponer a las dos coordenadas de un punto el que verifiquen una relación, condición necesaria y suficiente para que el punto pertenezca a dicho subconjunto.

Si el subconjunto en cuestión es una curva γ dada mediante sus ecuaciones paramétricas, dicha relación, $F(x_1, x_2) = 0$, llamada ecuación en *forma implícita* de la curva, se obtendrá eliminando el parámetro t entre las ecuaciones $x_1 = f_1(t)$ y $x_2 = f_2(t)$.

Si las ecuaciones paramétricas de la curva γ fueran $x_1 = t$ y $x_2 = f_2(t)$, la eliminación del parámetro t sería muy sencilla y obtendríamos $x_2 = f_2(x_1)$, que es la ecuación de la curva en *forma explícita.*

EJEMPLO 1. Sea la curva γ dada por las ecuaciones paramétricas $x_1 = \operatorname{Ch} t$ y $x_2 = \operatorname{Sh} t$; elevando cada una de ellas al cuadrado y restando la segunda de la primera, obtenemos

$$x_1^2 - x_2^2 = 1,$$

que es la ecuación de la curva en forma implícita y, despejando x_2, tenemos

$$x_2 = \pm \sqrt{x_1^2 - 1},$$

que sería la ecuación en forma explícita de la curva, la cual se descompondría, para su estudio, en dos ramas:

$$x_2 = + \sqrt{x_1^2 - 1} \quad \text{y} \quad x_2 = - \sqrt{x_1^2 - 1}.$$

EJERCICIOS

1. Hállense dos juegos de ecuaciones paramétricas de la circunferencia de centro el origen y radio 2.

2. Hállense ecuaciones paramétricas en las que x_1 y x_2 sean funciones racionales de un parámetro t, de la cónica $x_2^2 = ax_1^2 + 2bx_1 + c$:

1.º Cuando la cónica es una hipérbola.
2.º Cuando la cónica corta al eje $x_1 = 0$, y
3.º Cuando corta al eje $x_2 = 0$.

23.2. Curvas planas en forma explícita.

TANGENTE Y NORMAL.

Se llama *tangente* a una curva γ en uno de sus puntos P, a la posición límite, si existe, de las secantes determinadas por el punto P y un segundo punto de la curva, cuando este punto tiende a P.

Si la curva γ viene dada en forma explícita $x_2=f(x_1)$ y si $P\ (p_1, f(p_1))$ y $Q\ (q_1, f(q_1))$, la ecuación de la recta PQ, es

$$x_2-f(p_1)=\frac{f(p_1)-f(q_1)}{p_1-q_1}\,(x_1-p_1)$$

pero

$$\lim_{Q\to P}\frac{f(p_1)-f(q_1)}{p_1-q_1}=f'(p_1),$$

luego la ecuación de la tangente a γ en P es

$$x_2-f(p_1)=f'(p_1)\,(x_1-p_1). \tag{219}$$

EJEMPLO 1. La tangente a la curva $\gamma\ x_2=x_1^3-2x_1+3$ en el punto $P\ (2, 7)$ tiene por ecuación

$$x_2-7=10(x_1-2).$$

La tangente a una curva en un punto pudiera no existir, aun cuando la curva sea continua en ese punto. Por ejemplo, si

$$x_2=|x_1|,\qquad \lim_{x_1\to 0}|x_1|=\pm 1,$$

según se tienda a cero por la derecha o por la izquierda.

Se llama *normal* a la curva γ en un punto P a la recta perpendicular a la tangente a la curva por P.

La ecuación de la normal γ en P es, en forma explícita,

$$x_2-f(p_1)=-\frac{1}{f'(p_1)}\,(x_1-p_1). \tag{220}$$

EJEMPLO 2. La normal a la curva del ejemplo anterior en P tiene por ecuación

$$x_2-7=-\frac{1}{10}\,(x_1-2).$$

CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD.

Sea P un punto de una curva γ en el que existe tangente y ésta no es paralela al eje de las x_1. Se dice que γ *gira su concavidad* hacia las x_2 positivas en P, o que es *cóncava* en P, si existe un entorno $(p_1-\delta,\ p_1+\delta)$ de p_1 para los puntos del cual la ordenada de la curva es mayor que la ordenada de la tangente en P. Si la ordenada de la curva es menor que la ordenada de la tangente para valores de x_1 de un cierto entorno de p_1, se dice que la curva es *convexa*. Si la curva no es cóncava ni convexa en un punto P, se dice que P es un *punto de inflexión*.

Se dice que una curva es cóncava en un intervalo si lo es en todos los puntos del mismo.

Si $f(x_1)$ admite el desarrollo de Taylor en el punto p_1+h, tenemos:

$$(221)\qquad f(p_1+h)=f(p_1)+f'(p_1)h+\frac{1}{2!}f''(p_1)h^2+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n}(p_1)h^n+\ldots,$$

el valor de la ordenada de la tangente a γ en P, en el punto p_1+h, es

$$f_t(p_1+h)=f(p_1)+f'(p_1)h,$$

luego

$$(222)\qquad f(p_1+h)-f_t(p_1+h)=\frac{1}{2!}f''(p_1)h^2+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n}(p_1)h^n+\ldots$$

Sea k el orden de la primera derivada de $f(x_1)$ que no se anula para $x_1=p_1$, entonces tomando h suficientemente pequeño podemos hacer que el signo de la diferencia $f(p_1+h)-f_t(p_1+h)$ sea el del primer término no nulo del desarrollo del segundo miembro de (222)

$$\frac{1}{k!}f^{(k}(p_1)h^k.$$

Si k es par, el signo de dicho término no depende de h, luego en el punto P de γ, la curva será cóncava o convexa según que $f^{(k}(p_1)$ sea positiva o negativa. Si k es impar, al cambiar de signo h cambia de signo la diferencia $f(p_1+h)-f_t(p_1+h)$, luego el punto P será, en este caso, de inflexión.

EJEMPLO 3. La curva de los ejemplos anteriores es cóncava en $P\ (2,\ 7)$, pues $f''(2)=12>0$.

EJEMPLO 4. La curva $\gamma\equiv x_2=3x_1^4-4x_1^3+1$ tiene un punto de inflexión en $x_1=0$, pues $f'(0)=0$ y $f'''(0)=-24$.

EXTREMOS RELATIVOS.

Se dice que el punto P de la curva γ es un *máximo relativo (mínimo relativo)* de γ si existe un entorno de p tal que la ordenada de la curva correspondiente a cualquier punto de dicho entorno es menor (mayor) que la ordenada en p_1. A los máximos y mínimos relativos se les llama *extremos relativos.*

Si $\gamma\equiv x_2=f(x_1)$, la condición de máximo será

$$f(p_1+h)-f(p_1)<0 \quad \forall \quad h \mid |p-h|<\delta.$$

y la de mínimo

$$f(p_1+h)-f(p_1)>0 \quad \forall \quad h \mid |p-h|<\delta.$$

Ahora bien, de (221)

$$f(p_1+h)-f(p_1)=f'(p_1)h+\frac{1}{2!}f''(p_1)h^2+\ldots+$$

$$+\frac{1}{k!}f^{(n}(p_1)h^n+\ldots$$

Si es k el orden de la primera derivada de f que no se anula para $x_1=p_1$, puesto que haciendo h suficientemente pequeño el signo de $f(p_1+h)-f(p_1)$ será el del término $\frac{1}{k!}f^{(k}(p_1)h^k$, resulta que si k es par habrá un extremo relativo de γ en P, que será máximo o mínimo según que $f^{(k}(p_1)<0$ o $f^k(p_1)>0$. Luego es condición necesaria para que en P haya un extremo que $f'(p_1)=0$. Pero esta condición no es suficiente, ya que si la primera derivada de f que no se anula para $x_1=p_1$ es de orden impar, el punto P será de inflexión con tangente horizontal.

EJEMPLO 5. Los valores de x_1 que anulan a $f'(x_1)$ en la curva del ejemplo 4 son 0 y 1, pero (0, 1) es un punto de inflexión de la curva. El punto (1, 0) es un mínimo, puesto que $f''(1)=12>0$.

SEGMENTOS DETERMINADOS POR LA TANGENTE Y LA NORMAL.

Los segmentos PT y PN determinados por el punto P y los T y N de intersección de la tangente y de la normal, respectivamente, con el eje de abscisas se denominan *segmento tangente* y *segmento normal.* A sus proyecciones TQ y QN se les llama *subtangente* y *subnormal.*

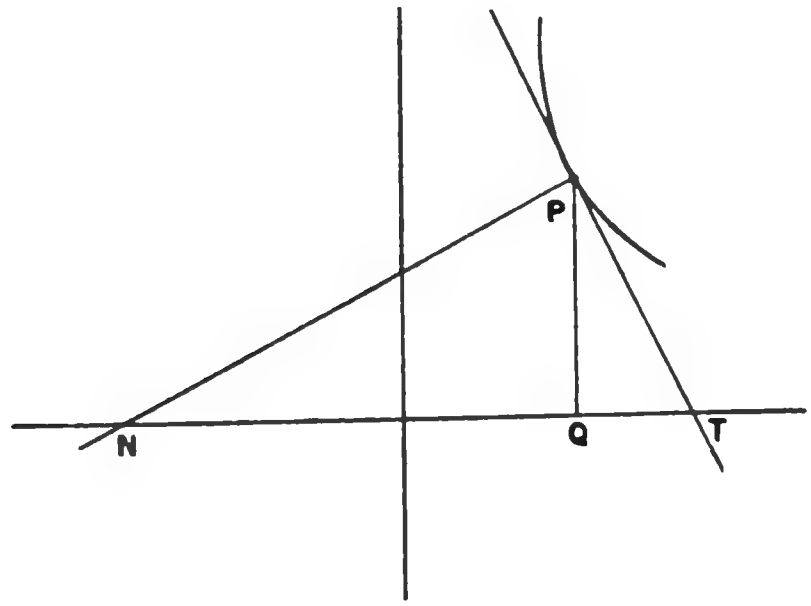


FIG. 17.

Vamos a calcular las longitudes de estos cuatro segmentos:

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(p_1) = \frac{f(p_1)}{\overline{TQ}} \Longrightarrow \overline{TQ} = \frac{f(p_1)}{f'(p_1)},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{QN}}{f(p_1)} \Longrightarrow \overline{QN} = f(p_1)f'(p_1),$$

$$\overline{PT} = \left| \frac{f(p_1)}{f'(p_1)} \sqrt{1+f'(p_1)^2} \right| \qquad \overline{PN} = |f(p_1)\sqrt{1+f'(p_1)^2}|.$$

EJEMPLO 6. Las longitudes de los segmentos tangente, normal, subtangente y subnormal en el punto (2, 7) de la curva del ejemplo 1 son:

$$\overline{TQ} = \frac{7}{10}, \quad \overline{QN} = 70, \quad \overline{PT} = \frac{7\sqrt{101}}{10}, \quad \overline{PN} = 7\sqrt{101}.$$

RAMAS INFINITAS DE UNA CURVA. ASÍNTOTAS Y DIRECCIONES ASINTÓTICAS.

Se dice que una curva posee una *rama infinita* cuando una al menos de las coordenadas de un punto variable de ella crece indefinidamente.

Se llama *asíntota* de una curva a una recta tal que la distancia de un punto de la curva a dicha recta tiende a cero cuando el punto se aleja indefinidamente.

ASÍNTOTAS PARALELAS AL EJE OX_2.

Sea la curva $\gamma \equiv x_2 = f(x_1)$. Si x_2 tiende a infinito cuando x_1 tiende hacia a, siendo a finito, la recta $x_1 = a$ es una asíntota a la curva.

ASÍNTOTAS PARALELAS AL EJE OX_1.

Si x_2 tiende a un límite finito b cuando x_1 tiende a infinito, la recta $x_2 = b$ es una asíntota a la curva.

ASÍNTOTAS OBLICUAS.

Si x_2 tiende a infinito cuando x_1 tiende a infinito, para que la recta $x_2 = mx_1 + h$ sea una asíntota a la curva, la distancia PQ de un punto P de la curva a la recta tiene que tender a cero cuando P se aleja indefinidamente, pero eso es equivalente a que, en las mismas condiciones, tienda a cero PM, donde M es la intersección de la paralela al eje de ordenadas por P con la recta, ya que PQ y PM son proporcionales.

Se tiene

$$\overline{MP} = f(x_1) - x_2 - mx_1 - h = \epsilon(x_1)$$

luego

$$f(x_1) = mx_1 + h + \epsilon(x_1)$$

donde $\epsilon(x_1)$ tiende a cero cuando x_1 tiende a infinito.

Dividiendo la igualdad anterior por x_1 y tomando límites para $x_1 \longrightarrow \infty$ en ambos miembros, tenemos

$$\lim_{x_1 \to \infty} \frac{f(x_1)}{x_1} = \lim_{x_1 \to \infty} \left(m + \frac{h}{x_1} + \frac{\epsilon(x_1)}{x_1} \right) = m.$$

Se llama *dirección asintótica* a la dirección definida por la recta

$$x_2 = mx_1$$

paralela a la asíntota. Esta recta es el límite de la recta determinada por el origen O y el punto P de la curva, cuando éste se aleja indefinidamente.

La ordenada en el origen h de la asíntota se calcula mediante

$$h = \lim_{x_1 \to \infty} (f(x_1) - mx_1).$$

Si el límite anterior existe y es finito, obtenemos la asíntota

$$x_2 = mx_1 + h.$$

Se dice en este caso que la rama correspondiente de la curva es *hiperbólica.*

Si $\lim_{x_1 \to \infty} (f(x_1) - mx_1) = \pm\infty$, se dice que la rama es *parabólica.*

Puede ocurrir que el límite anterior no exista.

Las direcciones asintóticas de una curva son sus puntos impropios. Si la rama es hiperbólica, el punto impropio correspondiente tiene tangente propia, la asíntota. Si es parabólica, la tangente es la recta del infinito, y si el límite último no existe, no hay tangente en el punto impropio correspondiente.

EJEMPLO 7. Sea la curva $x_2 = \dfrac{3x_1^2 + x_1 - 2}{2x_1 + 7}$.

$$\lim_{x_1 \to -7/2} x_2 = \infty,$$

luego $2x_1 + 7 = 0$ es una asíntota vertical.

$$\operatorname{Lím}_{x_1 \to \infty} \frac{x_2}{x_1} = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad \lim \left(x_2 - \frac{3}{2} x_1 \right) = -3$$

y, por tanto,

$$x_2 = \frac{3}{2} x_1 - 3$$

es la única asíntota oblicua.

DIBUJO DE CURVAS EN FORMA EXPLÍCITA.

Para dibujar una curva en forma explícita se debe proceder de la siguiente forma:

1.° Se precisarán los valores de x_1 para los cuales está definida la función $f(x_1)$. Este conjunto I de valores puede estar limitado en razón de las simetrías que pueda presentar la curva. Si la función f es par, es decir, si

$$\forall\ x_1 \in I \Longrightarrow f(-x_1) = f(x_1),$$

la curva es simétrica respecto al eje OX_2. Si f es impar, es decir, si

$$\forall\ x_1 \in I \Longrightarrow f(-x_1) = -f(x_1),$$

la curva es simétrica respecto al origen. En ambos casos bastará estudiar la curva para valores no negativos de la variable x_1.

Si la función f es *periódica,* es decir, si existe un número real t tal que

$$f(x_1+t) = f(x_1)\ \ \forall\ x_1 \in I,$$

la curva se compone de arcos de curva que se deducen unos de otros por traslación. Bastará estudiar la curva en un intervalo que tenga por amplitud el período t.

Se anotarán los puntos de discontinuidad de f, así como los de f'.

2.° Se estudiará la concavidad y convexidad de la curva.

3.° Se determinarán los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

4.° Se calcularán los máximos y mínimos.

5.° Se hallarán los puntos de inflexión. Conviene calcular las tangentes en los mismos.

6.° Se determinarán los puntos de intersección de la curva con los ejes.

7.° Se calcularán las asíntotas, así como los puntos de intersección de la curva con ellas y, por último,

8.° Es conveniente establecer un cuadro general de valores.

EJERCICIOS

1. Dibujar la curva de ecuación

$$x_2 = \frac{2x_1^2 - 5x_1 + 2}{3x_1^2 - 10x_1 + 3}.$$

2. Hállense las ecuaciones de las tangentes trazadas a la curva $x_2 = x_1^2$ desde el punto $(1, -4)$.

3. Dibújese la curva

$$\gamma \equiv x_2 = x_1 e^{1/x_1}.$$

4. Dada la curva

$$\gamma \equiv x_2 = \frac{\lambda x_1 + \mu}{(x_1 - 2)(x_1 - 3)}$$

calcúlense λ y μ para que el punto $\left(2, -\frac{1}{5}\right)$ sea un máximo o un mínimo relativo.

5. Máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión de la curva

$$\gamma \equiv x_2 = \frac{x_1}{x_1^2 - 5x_1 + 4}$$

23.3. Curvas planas en forma paramétrica.

TANGENTE Y NORMAL.

Sea la curva $\gamma \equiv \begin{cases} x_1 = f(t) \\ x_2 = g(t) \end{cases}$ y P el punto de γ correspondiente al valor t_o del parámetro, es decir, $P\ (f(t_o),\ g(t_o))$. La ecuación de la tangente a γ en P es, como hemos visto en el párrafo anterior,

$$x_2 - g(t_o) = \left(\frac{dx}{dx}\right)_{(f(t_o),\ g(t_o))} (x_1 - f(t_o).$$

Ahora bien, en el punto de tangencia $dy = g'(t_o)dt$, $dx = f'(t_o)dt$, y obtenemos

$$x_2 - g(t_o) = \frac{g'(t_o)}{f'(t_o)} (x_1 - f(t_o))$$

como ecuación de la tangente. Ecuación que también puede escribirse en la forma

$$\frac{x_1 - f(t_o)}{f'(t_o)} = \frac{x_2 - g(t_o)}{g'(t_o)}$$

que pone de manifiesto que el vector $t = (f'(t_o),\ g'(t_o))$ es un vector de dirección de la tangente.

Naturalmente, para que la tangente esté definida en el punto $(f(t_o),\ g(t_o))$ es necesario que $f'(t_o)$ y $g'(t_o)$ no sean simultáneamente nulas. Los puntos en que esto ocurre se llaman *ordinarios* y los puntos en los que $f'(t_o) = g'(t_o) = 0$, se denominan puntos *singulares.*

La ecuación de la normal a la curva γ en un punto ordinario será:

$$f'(t_0)(x_1-f(t_0)+g'(t_0)(x_2-g(t_0))=0.$$

EJEMPLO 1. La tangente a la curva

$$x_1=\frac{2t}{t^2+1}$$

$$x_2=3t^2+1$$

en el punto correspondiente al valor del parámetro $t=2$, tiene por ecuación

$$x_2-13=-\frac{25\cdot 13}{6}\left(x_1+\frac{6}{25}\right)$$

y la de la normal

$$6\left(x_1+\frac{6}{25}\right)-25\cdot 13(x_2-13)=0.$$

Los valores de t que anulan a $g'(t)$ sin anular a $f'(t)$ dan puntos de tangente paralela al eje de abscisas (extremos o puntos de inflexión), y los que anulan a $f'(t)$ sin anular a $g'(t)$, corresponden a puntos de tangente paralela al eje de ordenadas.

También puede haber puntos de tangente paralela al eje de abscisas correspondientes a los valores del parámetro que hacen infinito a $f'(t)$ y que dan valores finitos para $g'(t)$. Análogamente, para los puntos de tangente paralela a Ox_2.

CONCAVIDAD, CONVEXIDAD, PUNTOS DE INFLEXIÓN.

Sabemos que la concavidad o convexidad viene determinada por el signo de $\frac{d^2x_2}{dx_1^2}$ y que los puntos de inflexión han de anular esta derivada segunda. Ahora bien, en el presente caso

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\frac{g'(t)}{f'(t)},$$

luego

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2}=\frac{d}{dx_1}\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)=\frac{d}{dx_1}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{g'(t)}{f'(t)}\right)\frac{dt}{dx_1}=$$

$$=\frac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{f'(t)^3}$$

expresión que particularizada para el valor del parámetro correspondiente a un punto P de la curva, nos permitirá determinar, según sea positiva, negativa o nula, si en dicho punto hay concavidad, convexidad o si el punto es de inflexión.

EJEMPLO 2. En el punto correspondiente al valor del parámetro $t=\frac{\pi}{4}$ de la curva $x_1=4\cos t$, $x_2=4\operatorname{sen} t$, la curva es convexa, pues

$$\frac{g''(t)f'(t)-g'(t)f''(t)}{f'(t)^3}=-\frac{\sqrt{2}}{2}<0.$$

SEGMENTOS DETERMINADOS POR LA TANGENTE Y LA NORMAL.

Se comprueba fácilmente que las longitudes de los segmentos determinados por la tangente y la normal en un punto de una curva en forma paramétrica, vienen dadas por las expresiones:

$$\overline{PT}=\frac{g(t)}{g'(t)}\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}, \qquad \overline{PN}=\frac{g(t)}{f'(t)}\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2},$$

$$\overline{TQ}=g(t)\frac{f'(t)}{g'(t)}, \qquad \overline{QN}=g(t)\frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

SIMETRÍAS.

Si para todo valor del parámetro t existe otro t' tal que

$$f(t)=f(t'), \quad g(t)=-g(t'),$$

el eje de abscisas es eje de simetría de la curva.

Si $f(t)=-f(t')$ y $g(t)=g(t')$ lo es el eje de ordenadas.

Si $f(t)=-f(t')$ y $g(t)=-g(t')$ el origen es centro de simetría.

Si $f(t)=g(t')$ y $g(t)=f(t')$, la recta $x_2=x_1$ es eje de simetría de la curva.

Si $f(t)=-g(t')$ y $g(t)=f(t')$, lo es la recta $x_2=-x_1$.

RAMAS INFINITAS. ASÍNTOTAS.

Si $f(t_0)=\infty$ y $g(t_0)=a$, la recta $x_2=a$ es una asíntota a la curva, paralela al eje de abscisas.

Si $f(t_0)=b$ y $g(t_0)=\infty$, la recta $x_1=b$ es una asíntota paralela al eje de ordenadas.

Si $\lim_{t\to t_0} f(t)=\infty$ y $\lim_{t\to t_0} g(t)=\infty$ y $\lim_{t\to t_0} \dfrac{g(t)}{f(t)}=m$, la recta $x_2=mx_1$ es una dirección asintótica, que corresponderá a una rama hiperbólica de la curva si

$$\lim_{t\to t_0} [g(t)-mf(t)]=h.$$

h finito. Si el límite anterior es infinito, la rama será parabólica y, por último, si no existe el límite, es que la curva no posee tangente en el punto impropio correspondiente.

EJEMPLO 3. Las asíntotas de la curva

$$\gamma\equiv\begin{cases} x_1=\dfrac{t^2-5t+6}{t-5} \\ x_2=\dfrac{t^2-5t+4}{t-2} \end{cases}$$

son: para $t=5$:

$$7x_2-4=0;$$

para $t=-2$:

$$7x_1+20=0,$$

y para $t\longrightarrow\infty$:

$$\Longrightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{x_2}{x_1}=1 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty}(x_2-1\cdot x_1)=-7,$$

luego $x_2=x_1-7$ es la única asíntota oblicua.

EJERCICIOS

1. Hállese la ecuación que da los coeficientes angulares de las tangentes trazadas por el punto (1, 4) a la curva

$$\gamma\equiv\begin{cases} x_1=t^2 \\ x_2=t^3-t^2 \end{cases}$$

2. Dibújese la curva

$$\gamma\equiv\begin{cases} x_1=\dfrac{t}{t^2-1} \\ x_2=\dfrac{t^2+1}{t^2-1} \end{cases}$$

3. Dibújese la curva

$$\gamma\equiv\begin{cases} x_1=t^2-4t \\ x_2=t^3-12t \end{cases}$$

4. Dibújese la curva

$$\gamma \equiv \begin{cases} x_1 = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \\ x_2 = \dfrac{2t}{3t+2} \end{cases}$$

23.4. Curvas planas en forma implícita.

La ecuación $f(x_1, x_2)=0$ representa siempre una relación: el conjunto de todas las parejas ordenadas de números reales (x_1, x_2) que la verifican. Se demuestra en Análisis (teorema de existencia de funciones implícitas) que si la función f y su derivada parcial respecto a x_2 son continuas en un cierto entorno de un punto $P\ (p_1, p_2)$ y si $\dfrac{\partial f(p_1, p_2)}{\partial x_2} \neq 0$, dicha relación es *localmente* una función, es decir, existe una función $x_2=\varphi(x_1)$ continua en un intervalo $(p_1-\delta, p_1+\delta)$ tal que $\lim\limits_{x_1 \to p_1} \varphi(x_1)=p_2$ y que verifica idénticamente la relación $f[x_1, \varphi(x_1)]=0$.

Partiendo de un punto $P\ (p_1, p_2)$ tal que $f(p_1, p_2)=0$, es posible ir definiendo puntos del plano cuyas coordenadas verifiquen también la ecuación $f(x_1, x_2)=0$. Estos puntos se encuentran sobre una cierta curva.

Nos proponemos efectuar el estudio de esta clase de curvas sin resolver $f(x_1, x_2)=0$ respecto a una de las incógnitas.

Clasificación de las curvas.

Las curvas se clasifican en *algebraicas* y *trascendentes*, según que la función f sea un polinomio o no. En las primeras se llama *orden* de la curva al grado del polinomio f.

Las dos definiciones anteriores son independientes del sistema de referencia elegido.

En lo que sigue supondremos siempre que las funciones $f(x_1, x_2)$ que definen implícitamente las curvas objeto de nuestro estudio, admiten desarrollo de Taylor en un entorno de casi todos sus puntos.

Tangente y normal.

Sean $P\ (p_1, p_2)$ y $Q\ (p_1+\Delta x_1, p_2+\Delta x_2)$ dos puntos de la curva $\gamma \equiv f(x_1, x_2)=0$. Entonces

$$f(p_1, p_2)=0$$

y

$$f(p_1+\Delta x_1,\ p_2+\Delta x_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^{(n} f(p_1,\ p_2)=0.$$

Si

$$\frac{\partial f(p_1,\ p_2)}{\partial x_1} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f(p_1,\ p_2)}{\partial x_2}$$

no son simultáneamente nulas, dividiendo ambos miembros por Δx_1 y tomando límites en ambos miembros para $\Delta x_1 \longrightarrow 0$, obtendremos

$$\frac{\partial f(p_1,\ p_2)}{\partial x_2}+\frac{dx_2}{dx_1}\cdot\frac{\partial f(p_1,\ p_2)}{\partial x_2}=0$$

de donde

$$\frac{dx_2}{dx_1}=-\frac{\dfrac{\partial f(p_1,\ p_2)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f(p_1,\ p_2)}{\partial x_2}}$$

con lo que la ecuación de la tangente a la curva γ en el punto P será

$$\frac{\partial f(p_1,\ p_2)}{\partial x_1}(x_1-p_1)+\frac{\partial f(p_1,\ p_2)}{\partial x_2}(x_2-p_2)=0,$$

y la de la normal,

$$\frac{\partial f(p_1,\ p_2)}{\partial x_2}(x_1-p_1)+\frac{\partial f(p_1,\ p_2)}{\partial x_1}(x_2-p_1)=0.$$

A los puntos de γ en los que al menos una de las derivadas parciales primeras de f es distinta de cero, se les llama puntos *ordinarios*. Las ecuaciones anteriores son, pues, las de la tangente y normal en un punto ordinario de la curva.

Si un punto de una curva no es ordinario se llama *singular*.

Sea k el orden de la primera derivada parcial de f que no se anula en un punto singular P. Por un proceso análogo al del caso anterior, obtendríamos

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{dx_2}{dx_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{(k} f(p_1,\ p_2)=0$$

que es una ecuación de grado k en $\dfrac{dx_2}{dx_1}$. Resuelta nos daría las pendientes de las k tangentes a la curva en el punto P.

En el caso $k=2$ se dice que P es un punto doble y la ecuación correspondiente es

$$\frac{\partial^2 f(p_1,\ p_2)}{\partial x_2^2}\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2+2\frac{\partial^2 f(p_1,\ p_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dx_1}+\frac{\partial^2 f(p_1,\ p_2)}{\partial x_1^2}=0$$

que tendrá dos raíces reales distintas, dos reales confundidas o dos imaginarias conjugadas según que

$$\left(\frac{\partial^2 f(p_1,\ p_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 f(p_1,\ p_2)}{\partial x_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f(p_1,\ p_2)}{\partial x_2^2}\right)\gtreqless 0.$$

En el primer caso habrá en P dos tangentes reales distintas (punto *doble* o de *retroceso*); en el segundo habrá una sola tangente y el punto se dirá de *retroceso* de *primera* o *segunda especie*, según que los dos arcos de la curva estén separados por la tangente o no; en el tercer caso habrá dos tangentes imaginarias y el punto se dice *aislado*.

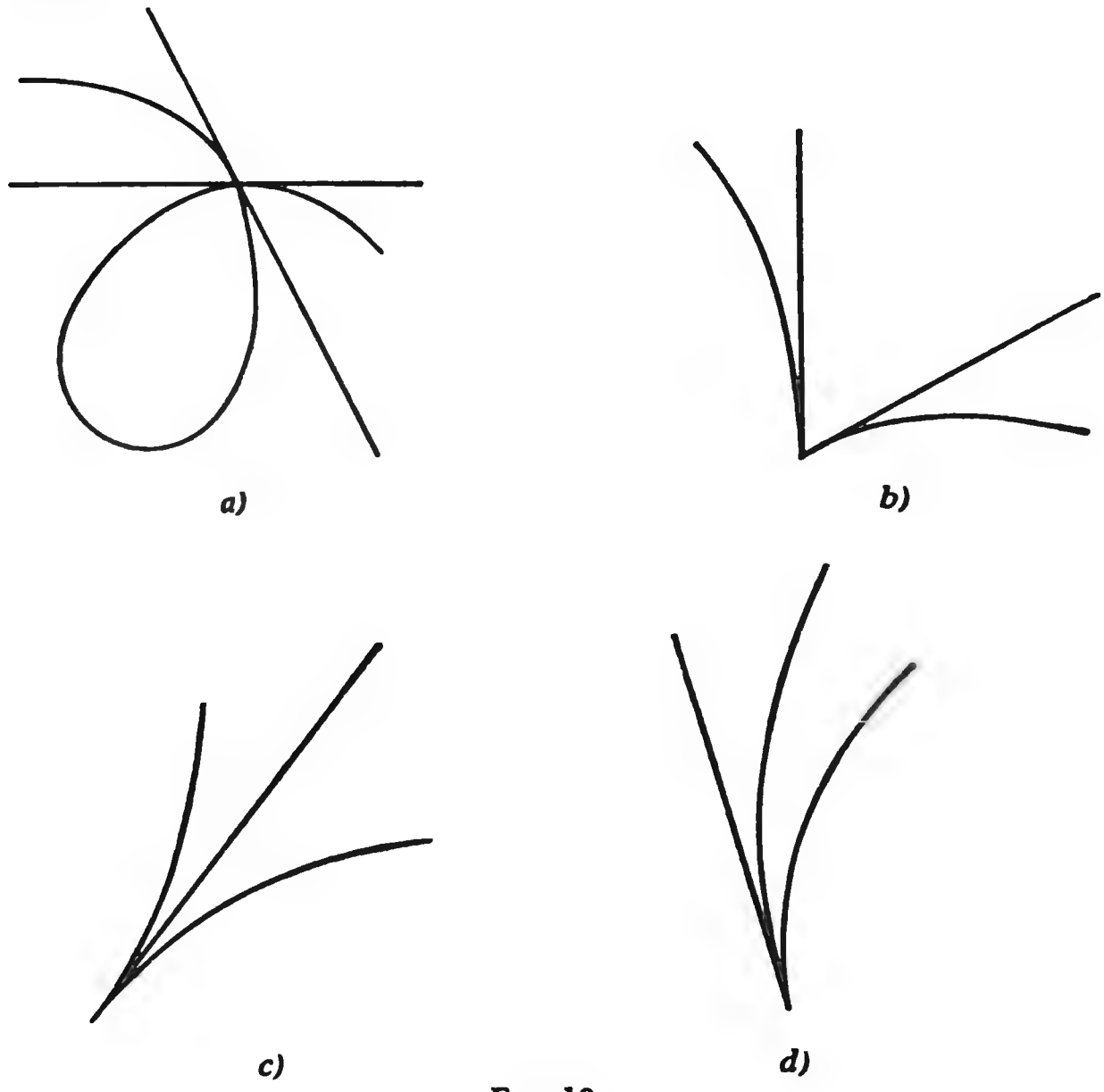


FIG. 19.

EXTREMOS RELATIVOS.

Los extremos relativos de la curva $\gamma \equiv f(x_1, x_2) = 0$ son soluciones (m_1, m_2) del sistema

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = 0 \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

que no anulen a la derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ puesto que dichos puntos han de pertenceer a la curva y verificar la ecuación

$$\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)_{(m_1, m_2)} = -\frac{\dfrac{\partial f(m_1, m_2)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f(m_1, m_2)}{\partial x_2}}.$$

Serán máximos o mínimos según que

$$\frac{\partial^2 f(m_1, m_2)}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial f(m_1, m_2)}{\partial x_2} \gtrless 0$$

como se desprende de la expresión

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \cdot \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \cdot \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)^3}$$

cuando se hace $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0$.

SIMETRÍAS.

Si la curva $\gamma \equiv f(x_1, x_2) = 0$ es tal que

a) $f(-x_1, x_2) = 0$
b) $f(x_1, -x_2) = 0$
c) $f(-x_1, -x_2) = 0$

la curva es: simétrica respecto al eje de ordenadas, al de abscisas o tendrá como centro de simetría al origen, respectivamente.

RAMAS INFINITAS. ASÍNTOTAS.

Haremos el estudio únicamente para curvas algebraicas.

Si $f(x_1,\ x_2)=0$ representa una curva algebraica, agrupando los términos del mismo grado en el polinomio $f(x_1,\ x_2)$, obtenemos la siguiente descomposición de f en componentes homogéneas

$$f(x_1,\ x_2)=\varphi_n(x_1,\ x_2)+\varphi_{n-1}(x_1,\ x_2)+\ldots+\varphi_0(x_1,\ x_2)=0$$

donde φ_k simboliza un polinomio homogéneo en x_1 y x_2 de grado k.

Hallemos la intersección de la recta $r\equiv x_2=mx_1+h$ con la curva. El sistema formado por la ecuación de la curva y la de la recta es equivalente al

$$\begin{cases} x_1^n\varphi_n\left(1,\ m+\dfrac{h}{x_1}\right)+x_1^{n-1}\varphi_{n-1}\left(1,\ m+\dfrac{h}{x_1}\right)+\ldots+\varphi_0=0 \\ x_2=mx_1+h \end{cases}$$

Desarrollando por Taylor cada uno de los términos de la primera ecuación, tenemos

$$x_1^n\varphi_n(1,\ m)+x^{n-1}[h\varphi_n'(1,\ m)+\varphi_{n-1}(1,\ m)]+$$
$$+x^{n-2}\left[\frac{h}{2}\varphi_n''(1,\ m)+\ldots\right]+\ldots=0.$$

Para los valores de m tales que $\varphi_n(1,\ m)=0$, la ecuación anterior tiene una raíz infinita, luego la recta tiene común con la curva un punto del infinito, por tanto, las raíces de $\varphi_n(1,\ m)=0$ nos dan las direcciones asintóticas.

Si m es una de estas raíces, el valor h que anula el coeficiente de x^{n-1} en la ecuación anterior, hace que dicha ecuación tenga otra raíz infinita, luego la recta

$$x_2=mx_1+h$$

tal que

$$\varphi(1,\ m)=0 \quad \text{y} \quad h=-\frac{\varphi_{n-1}(1,\ m)}{\varphi_n'(1,\ m)}$$

es una asíntota de la curva.

Hemos supuesto que $\varphi_n'(1,\ m)\neq 0$.

EJERCICIOS

1. Dibújese la curva

$$\gamma \equiv x_1^3 + x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2 - x_2^2 = 0.$$

2. Dibújese la curva

$$\gamma \equiv x_1^2 x_2^2 - x_2^4 - 2x_2^3 + 2x_1 = 0.$$

JAR'23

24

Curvas alabeadas

24.1. Nociones de análisis vectorial.

Sea $\sigma\colon I \longrightarrow V_3$ una aplicación de un intervalo $I=(a,\ b)$ de R en el espacio vectorial de los vectores libres. Si $t \in I$, se dice que el vector $\mathbf{v}=\sigma(t)$ es función del parámetro t y se escribe $\mathbf{v}(t)$.

Las coordenadas de $\mathbf{v}$ respecto a una base $\{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3\}$, $v_1,\ v_2,\ v_3$, son funciones del parámetro t

$$\mathbf{v}(t)=v_1(t)\,\mathbf{u}_1+v_2(t)\,\mathbf{u}_2+v_3(t)\,\mathbf{u}_3.$$

Se dice que el vector $\mathbf{a}$ es límite del vector $\mathbf{v}(t)$ y se escribe

$$\mathbf{a}=\lim_{t\to t_o}\mathbf{v}(t),$$

cuando t tiende a t_o, si para todo $\epsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que

$$|\mathbf{v}(t)-\mathbf{a}|<\epsilon \quad \forall \quad t \mid |t-t_o|<\delta.$$

Si $\mathbf{a}=a_1\mathbf{u}_1+a_2\mathbf{u}_2+a_3\mathbf{u}_3$, es fácil comprobar que la condición necesaria y suficiente para que $\lim_{t\to t_o}\mathbf{v}=\mathbf{a}$, es que

$$\lim v_i(t)=a_i, \qquad i=1,\ 2,\ 3.$$

Se dice que la función $\mathbf{v}(t)$ es continua en t_o si

$$\lim_{t\to t_o}\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}(t_o).$$

La condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{v}(t)$ sea continua en t_o es que lo sean las funciones $v_i(t)$, $i=1,\ 2,\ 3$.

Se llama derivada del vector $\mathbf{v}(t)$ respecto a t, correspondiente al valor t_o, al siguiente límite, si existe

$$\lim_{t\to t}\frac{\mathbf{v}(t_o)-\mathbf{v}(t)}{t-t_o}=\mathbf{v}'(t_o)$$

cuando $t \longrightarrow t_o$. La condición necesaria y suficiente para que $\mathbf{v}'(t_o)$ exista es que existan las derivadas $v_i'(t_o)$ $(i=1, 2, 3)$ y en este caso se tiene que

$$\mathbf{v}'(t_o) = v_1'(t_o)\mathbf{u}_1 + v_2'(t_o)\mathbf{u}_2 + v_3'(t_o)\mathbf{u}_3.$$

Las siguientes propiedades de la derivación de vectores son de fácil comprobación.

1. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{v}(t)+\mathbf{u}(t)] = \dfrac{d\mathbf{v}(t)}{dt} + \dfrac{d\mathbf{u}(t)}{dt},$

2. $\dfrac{d}{dt}[\lambda(t)\mathbf{v}(t)] = \dfrac{d\lambda(t)}{dt}\mathbf{v}(t) + \lambda(t)\dfrac{d\mathbf{v}(t)}{dt}$

3. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{w}(t)] = \dfrac{d\mathbf{v}(t)}{dt}\cdot\mathbf{w}(t) + \mathbf{v}(t)\cdot\dfrac{d\mathbf{w}(t)}{dt},$

4. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{v}(t)\times\mathbf{w}(t)] = \dfrac{d\mathbf{v}(t)}{dt}\times\mathbf{w}(t) + \mathbf{v}(t)\times\dfrac{d\mathbf{w}(t)}{dt},$

5. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{v}(t),\ \mathbf{w}(t),\ \mathbf{u}(t)] = \left[\dfrac{d\mathbf{v}(t)}{dt},\ \mathbf{w}(t),\ \mathbf{u}(t)\right] +$

$$+\left[\mathbf{v}(t),\ \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt},\ \mathbf{u}(t)\right] + \left[\mathbf{v}(t),\ \mathbf{w}(t),\ \frac{d\mathbf{w}(t)}{dt}\right],$$

6. Si $\mathbf{v}$ es función de t y $t=f(s) \Longrightarrow \dfrac{d\mathbf{v}}{ds} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\dfrac{dt}{ds}.$

EJERCICIOS

1. Si

$$\mathbf{u} = 3t^2\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2 + 5\mathbf{u}_3, \qquad \mathbf{v} = \frac{t^2-1}{t}\mathbf{u}_1 - \operatorname{sen} t\,\mathbf{u}_3$$

y

$$\mathbf{w} = \operatorname{Ch} t\,\mathbf{u}_1 + \operatorname{Ln} t\,\mathbf{u}_2 - 5t\mathbf{u}_3,$$

hállese

a) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}],$

b) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})].$

2. Demuéstrese que

$$\frac{d|\mathbf{v}|}{dt} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'}{|\mathbf{v}|}.$$

3. Demuéstrese que si la derivada de un vector es nula, el vector es constante.

4. Demuéstrese que si un vector tiene la misma dirección que su derivado, es de dirección constante.

24.2. Curvas alabeadas.

Llamaremos curva alabeada a la imagen γ de toda aplicación $\varphi: I \longrightarrow E_3$, de un intervalo de R en el espacio euclídeo tridimensional. Si $\{O; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es un sistema de referencia (que supondremos siempre métrico) en E_3, la curva alabeada γ puede venir dada por

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \\ x_3 = x_3(t) \end{cases}$$

y supondremos que las funciones $x_i(t)$, así como sus derivadas primeras, segundas y terceras, son continuas.

Las ecuaciones anteriores son las llamadas ecuaciones paramétricas de la curva γ. El vector de posición respecto al origen O, del punto genérico de la curva, será, pues,

$$\mathbf{x}(t) = x_1(t)\mathbf{u}_1 + x_2(t)\mathbf{u}_2 + x_3(t)\mathbf{u}_3.$$

EJEMPLO 1. Sea X un punto móvil que recorre la circunferencia $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ con velocidad angular constante ω, a la vez que dicha circunferencia se desplaza con velocidad constante v paralelamente a su plano, manteniéndose su centro sobre el eje Ox_3. La curva descrita por X vendrá dada por las ecuaciones paramétricas

$$x_1 = R\cos\omega t, \qquad x_2 = R\,\text{sen}\,\omega t, \qquad x_3 = vt.$$

A esta curva se le llama *hélice circular.*

TANGENTE, PLANO NORMAL.

Sean $\mathbf{x}(t_0)$ y $\mathbf{x}(t_0+\Delta t)$ los vectores de posición de dos puntos de la curva γ. El vector $\mathbf{x}(t_0+\Delta t) - \mathbf{x}(t_0)$ es un vector de dirección de la secante determinada por dichos puntos, luego

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{x}(t_0+\Delta t) - \mathbf{x}(t_0)}{\Delta t} = \dot{\mathbf{x}}(t_0)$$

(indicaremos las derivadas primera respecto a un parámetro cualquiera mediante un punto, la segunda con dos, etc.) es un vector de dirección de la tangente a la curva en el punto $\mathbf{x}(t_0)$. Las ecuaciones de la citada tangente son, por tanto,

$$\frac{x_1 - x_1(t_0)}{\dot{x}_1(t_0)} = \frac{x_2 - x_2(t_0)}{\dot{x}_2(t_0)} = \frac{x_3 - x_3(t_0)}{\dot{x}_3(t_0)}.$$

Suponemos que el punto $\mathbf{x}(t_0)$ es ordinario y que, por consiguiente, las tres $\dot{x}_i(t_0)$ no son simultáneamente nulas.

La ecuación vectorial de la tangente será

$$\mathbf{X}(\lambda) = \mathbf{x}(t_0) + \lambda \dot{\mathbf{x}}(t_0)$$

donde $\mathbf{X}(\lambda)$ es el vector de posición del punto genérico de la tangente.

EJEMPLO 2. La tangente a la curva

$$\gamma \equiv \begin{cases} x_1 = 2t^2 \\ x_2 = t^2 - t + 1 \\ x_3 = \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$$

en el punto $\mathbf{x}(1)$ es

$$\mathbf{X}(\lambda) = (2,\ 1,\ \tfrac{1}{2}) + \lambda(4,\ 1,\ 1).$$

Se llama *plano normal* a una curva alabeada γ en un punto $\mathbf{x}(t_0)$, al plano perpendicular a la tangente a la curva en dicho punto. El vector $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$ de dirección de la tangente, es un vector característico del plano normal, luego la ecuación de éste es

$$\dot{x}_1(t_0)\,(x_1 - x_1(t_0)) + \dot{x}_2(t_0))\,(x_2 - x_2(t_0)) + \\ + \dot{x}_3(t_0)\,(x_3 - x_3(t_0)) = 0$$

que puede ponerse en forma vectorial

$$\dot{\mathbf{x}}(t_0) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{x}(t_0)) = 0$$

donde $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$ es el vector de posición del punto genérico del plano.

Se llama *plano tangente* a una curva γ en un punto $\mathbf{x}(t_0)$ a todo plano que contiene a la tangente en dicho punto. Existe, por tanto, un haz de planos tangentes a una curva en un punto.

PLANO OSCULADOR. RECTA BINORMAL. RECTA NORMAL PRINCIPAL. PLANO RECTIFICANTE.

Se llama *plano osculador* a una curva alabeada γ en un punto $\mathbf{x}(t_o)$, a la posición límite de los planos determinados por dicho punto y dos más de la curva, $\mathbf{x}(t_1)$, $\mathbf{x}(t_2)$, cuando estos dos últimos tienden al primero. Por la forma en que se ha definido el plano osculador, será un plano tangente a la curva en el punto considerado.

Sea $\mathbf{a}$ un vector característico del plano osculador. Puesto que el punto $\mathbf{x}(t_o)$ pertenece a él, si $\mathbf{X}$ es el punto genérico del plano, se verifica que $\mathbf{X}-\mathbf{x}(t_o) \perp \mathbf{a}$, luego la ecuación vectorial de dicho plano es

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{X}-\mathbf{x}(t_o))=0.$$

Tratemos de determinar el vector $\mathbf{a}$. Para ello consideremos la función escalar

$$F(t)=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}(t_o)),$$

donde $\mathbf{b}$ es un vector característico del plano determinado por los puntos $\mathbf{x}(t_o)$, $\mathbf{x}(t_1)$ y $\mathbf{x}(t_2)$ de la curva. Entonces

$$F(t_o)=F(t_1)=F(t_2)=0,$$

luego aplicando el teorema de Rolle a $F(t)$ existirán dos valores de t, t_1' y t_2' tales que

$$t_o<t_1'<t_1<t_2'<t_2 \quad \text{y} \quad F'(t_1')=F'(t_2')=0,$$

aplicando nuevamente el teorema de Rolle a $F'(t)$, existirá un nuevo valor de t, t'' tal que

$$t_1'<t''<t_2' \quad \text{y} \quad F''(t'')=0.$$

Cuando

$$t_1 \longrightarrow t_o \quad \text{y} \quad t_2 \longrightarrow t_o,$$

t_1' t_2' y t'' también tenderán a t_o y el vector $\mathbf{b}$ tenderá al $\mathbf{a}$, luego teniendo en cuenta todo esto

$$F'(t_o)=\mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{x}}(t_o)=0, \qquad F''(t_o)=\mathbf{a}\cdot\ddot{\mathbf{x}}(t_o)=0,$$

es decir, el vector $\mathbf{a}$ es perpendicular a los vectores $\dot{\mathbf{x}}(t_o)$ y $\ddot{\mathbf{x}}(t_o)$ y, por tanto, tiene la dirección del vector $\dot{\mathbf{x}}(t_o)\times\ddot{\mathbf{x}}(t_o)$, luego si

$$\dot{\mathbf{x}}(t_o)\times\ddot{\mathbf{x}}(t_o)\neq 0,$$

este vector nos puede servir como vector característico del plano osculador, con lo que su ecuación vectorial es

$$(\mathbf{X}-\mathbf{x}(t_o))\cdot\dot{\mathbf{x}}(t_o)\times\ddot{\mathbf{x}}(t_o)=0$$

que equivale a

$$\begin{vmatrix} x_1-x_1(t_o) & x_2-x_2(t_o) & x_3-x_3(t_o) \\ \dot{x}_1(t_o) & \dot{x}_2(t_o) & \dot{x}_3(t_o) \\ \ddot{x}_1(t_o) & \ddot{x}_2(t_o) & \ddot{x}_3(t_o) \end{vmatrix}=0.$$

Excluiremos de nuestro estudio los puntos de la curva en los que

$$\dot{\mathbf{x}}(t_o)\times\ddot{\mathbf{x}}(t_o)=0.$$

Obsérvese que el vector $\ddot{\mathbf{x}}(t_o)$ es paralelo al plano osculador, como consecuencia de ser perpendicular a su vector característico.

Se llama *recta binormal* a una curva alabeada γ en un punto $x(t_o)$ a la recta perpendicular al plano osculador a la curva en dicho punto. El vector característico del plano osculador es un vector de dirección de la recta binormal, luego

$$\mathbf{X}(\lambda)=\mathbf{x}(t_o)+\lambda(\dot{\mathbf{x}}(t_o)\times\ddot{\mathbf{x}}(t_o))$$

es la ecuación vectorial de la recta binormal. Dicha recta puede darse también mediante las ecuaciones

$$\frac{x_1-x_1(t_o)}{\begin{vmatrix}\dot{x}_2(t_o)\dot{x}_3(t_o)\\ \ddot{x}_2(t_o)\ddot{x}_3(t_o)\end{vmatrix}}=\frac{x_2-x_2(t_o)}{\begin{vmatrix}\dot{x}_3(t_o)\dot{x}_1(t_o)\\ \ddot{x}_3(t_o)\ddot{x}_1(t_o)\end{vmatrix}}=\frac{x_3-x_3(t_o)}{\begin{vmatrix}\dot{x}_1(t_o)\dot{x}_2(t_o)\\ \ddot{x}_1(t_o)\ddot{x}_2(t_o)\end{vmatrix}}$$

A la recta intersección de los planos y osculador a una curva alabeada γ en un punto $\mathbf{x}(t_o)$ se le llama *normal principal.*

Sus ecuaciones serán

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t_o)\cdot(\mathbf{X}-\mathbf{x}(t_o))=0\\ [\mathbf{X}-\mathbf{x}(t_o),\ \dot{\mathbf{x}}(t_o),\ \ddot{\mathbf{x}}(t_o)]=0,\end{cases}$$

o bien, teniendo en cuenta qu esu vector de dirección ha de ser perpendicular a los vectores característicos de los planos normal y osculador

$$\mathbf{X}(\lambda)=\mathbf{x}(t_o)+\lambda[\dot{\mathbf{x}}(t_o)\times(\dot{\mathbf{x}}(t_o)\times\ddot{\mathbf{x}}(t_o))]$$

es su ecuación vectorial.

Se llama *plano rectificante* a una curva alabeada γ en un punto $\mathbf{x}(t_0)$ al plano determinado por la tangente y la binormal, es decir, al plano perpendicular a la normal principal. Su ecuación vectorial es

$$[\dot{\mathbf{x}}(t_0) \times (\dot{\mathbf{x}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{x}}(t_0))] \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{x}(t_0)) = 0.$$

EJEMPLO 3. Sea la curva del ejemplo 2, las ecuaciones del plano normal, plano osculador, recta binormal, recta normal principal y plano rectificante en el punto $x(1)$, son:

$$4(x_1 - 2) + (x_2 - 1) + (x_3 - \tfrac{1}{2}) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x_1 - 2 & x_2 - 1 & x_3 - \frac{1}{2} \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\frac{x_1 - 2}{-1} = \frac{x_2 - 1}{0} = \frac{x_3 - \frac{1}{2}}{4},$$

$$X(\lambda) = (2,\ 1,\ \tfrac{1}{2}) + \lambda(4,\ -5,\ 1), \quad 4(x_1 - 2) - 5(x_2 - 1) + (x_3 - \tfrac{1}{2}) = 0.$$

EJERCICIOS

1. Hállese la ecuación del plano osculador a la hélice

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \cos t \\ x_2 &= 3 \operatorname{sen} t \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

en un punto tal que resulte paralelo a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

2. Hállense los planos osculador, normal y rectificante, así como las rectas tangente, binormal y normal principal a la curva intersección de las superficies de ecuaciones $x_1 - x_3^3 = 0$ y $x_2 - x_3^4 = 0$, en el punto (8, 4, 2).

3. Area del triángulo cuyos lados son la tangente y la normal a la curva

$$\gamma \equiv \begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = t^3 \\ x_3 = 2t^2 + t \end{cases}$$

en el punto de abscisa -3 y la recta determinada por el plano $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ y el plano osculador a la curva en dicho punto.

4. Hállese el ángulo que forman el plano osculador a la curva

$$\gamma \equiv \begin{cases} x_1 = t^2 + 2t - 1 \\ x_2 = 4t + 1 \\ x_3 = t^2 + 2 \end{cases}$$

en el punto $t=1$, con la normal principal en el punto $t=2$.

24.3. Triedro intrínseco.

Hemos visto que la tangente a una curva alabeada γ en un punto $\mathbf{x}(t_0)$ tiene como vector de dirección el $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$. Este vector no tiene por que ser unitario.

Podemos cambiar de parámetro, sustituyendo el parámetro t por otro s, tal que $t=f(s)$. Nos interesa hallar un parámetro s tal que

$$\left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| = 1,$$

si esto es posible.

Tendremos

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}[f(s)],$$

luego

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds},$$

se tiene que verificar que

$$\left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| = 1$$

y, por tanto,

$$1 = \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \right| \Longrightarrow ds = \sqrt{\dot{x}_1(t_0)^2 + \dot{x}_2(t_0)^2 + \dot{x}_3(t_0)^2}\, dt,$$

luego

$$s = \int_{s_0}^{s} \sqrt{\dot{x}_1(t_0)^2 + \dot{x}_2(t_0) + \dot{x}_3(t_0)^2}\, dt,$$

de donde resulta que el parámetro buscado es la longitud del arco.

En lo que sigue supondremos siempre, mientras no se advierta lo contrario, que la curva viene expresada en función del parámetro arco, al que denotaremos por s. Las derivadas respecto a s se denotarán con acentos: $\dfrac{dx}{ds} = \mathbf{x}'$.

Vamos a asignar a cada punto de la curva un triedro trirrectángulo al que llamaremos *triedro intrínseco.* Dicho triedro estará dado por $\{\mathbf{x}(s);\ \mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, donde $\mathbf{t}$ es un vector unitario cuya dirección es la de la tangente y su sentido el de los arcos crecientes, se le llama vector *tangente*; $\mathbf{n}$ es un vector unitario al que se llama vector *normal principal,* paralelo al plano osculador y perpendicular a $\mathbf{t}$, su sentido se puede elegir de dos maneras distintas y, por último, $\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}$, y se le denomina vector *binormal.*

Tenemos $\mathbf{t}=\mathbf{x}'(s)$, $|\mathbf{x}'(s)|=1$ o, lo que es lo mismo, $\mathbf{x}'(s)^2=1$. Derivando en ambos miembros respecto a s:

$$2\mathbf{x}'(s)\cdot\mathbf{x}''(s)=0,$$

luego

$$\mathbf{x}''(s)\perp\mathbf{x}'(s).$$

Como además $\mathbf{x}''(s)$ es paralelo al plano osculador, resulta que $\mathbf{x}''(s)$ tiene la misma dirección que $\mathbf{n}$.

Los elementos del triedro intrínseco verifican las siguientes relaciones:

$$\mathbf{t}^2=\mathbf{n}^2=\mathbf{b}^2=1, \quad \mathbf{t}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{t}=0$$
$$\mathbf{t}\times\mathbf{n}=\mathbf{b}, \quad \mathbf{n}\times\mathbf{b}=\mathbf{t}, \quad \mathbf{b}\times\mathbf{t}=\mathbf{n}.$$

Vamos a estudiar las variaciones del triedro intrínseco, es decir, vamos a calcular los vectores derivados de los $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$.

Tenemos que

$$\mathbf{t}'=\alpha_1\mathbf{t}+\alpha_2\mathbf{n}+\alpha_3\mathbf{b}.$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad escalarmente por $\mathbf{t}$ y por $\mathbf{b}$, obtenemos

$$\mathbf{t}\cdot\mathbf{t}'=\alpha_1, \quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{t}'=\alpha_3.$$

Pero derivando $\mathbf{t}^2=1$, obtenemos $2\mathbf{t}\cdot\mathbf{t}'=0$, luego $\alpha_1=0$. Además como $\mathbf{t}=\mathbf{x}'(s)\Longrightarrow\mathbf{t}'=\mathbf{x}''(s)$ y $\mathbf{x}''(s)$ es paralelo al plano osculador $\Longrightarrow\alpha_3=\mathbf{b}\cdot\mathbf{t}'=0$. En resumen:

$$\mathbf{t}'=\alpha_2\mathbf{n}.$$

Análogamente,

$$\mathbf{n}'=\beta_1\mathbf{t}+\beta_2\mathbf{n}+\beta_3\mathbf{b}$$

y multiplicando escalarmente por $\mathbf{t}$ y por $\mathbf{n}$, resulta

$$\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}'=\beta_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'=\beta_2.$$

Derivando la igualdad

$$\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}=0\Longrightarrow\mathbf{t}'\cdot\mathbf{n}+\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}'=0,$$

como

$$\mathbf{t}'\cdot\mathbf{n}=\alpha_2\Longrightarrow\beta_1=\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}'=-\alpha_2.$$

Derivando

$$\mathbf{n}^2=1 \Longrightarrow 2\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'=0 \Longrightarrow \beta_2=0,$$

luego

$$\mathbf{n}'=-\alpha_2\mathbf{t}+\beta_3\mathbf{b}.$$

De la misma forma, multiplicando escalarmente $\mathbf{b}'=\gamma_1\mathbf{t}+\gamma_2\mathbf{n}+\gamma_3\mathbf{b}$ por $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ y $\mathbf{b}$, obtenemos, respectivamente,

$$\mathbf{t}\cdot\mathbf{b}'=\gamma_1, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{b}'=\gamma_2, \quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}'=\gamma_3.$$

De

$$\mathbf{t}\cdot\mathbf{b}=0 \Longrightarrow \mathbf{t}'\cdot\mathbf{b}+\mathbf{t}\cdot\mathbf{b}'=0$$

y como

$$\mathbf{t}'\cdot\mathbf{b}=0 \Longrightarrow \gamma_1=\mathbf{t}\cdot\mathbf{b}'=0.$$

Derivando la igualdad

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}=0 \Longrightarrow \mathbf{n}'\cdot\mathbf{b}+\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}'=0, \quad \text{pero} \quad \mathbf{n}'\cdot\mathbf{b}=\beta_3,$$

luego

$$\gamma_2=\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}'=-\beta_3.$$

Por último, de

$$\mathbf{b}^2=1 \Longrightarrow 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}'=0 \Longrightarrow \gamma_3=0$$

y, por tanto,

$$\mathbf{b}'=-\beta_3\mathbf{n}.$$

Vamos a tratar de hallar una significación geométrica para los parámetros α_2 y β_3.

Sean $\mathbf{x}(s_0)$ y $\mathbf{x}(s_0+\Delta s)$ dos puntos de la curva γ y $t(s_0)$ y $\mathbf{t}(s_0+\Delta s)$ los respectivos vectores tangentes. Llamemos $\Delta\varphi$ al ángulo que forman estas dos tangentes. Se define la *curvatura de flexión*, o *primera curvatura* de γ en el punto $\mathbf{x}(s_0)$ como el siguiente límite

$$\kappa=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

Tenemos

$$|\mathbf{t}(s_0+\Delta s)-\mathbf{t}(s_0)|=|\Delta\mathbf{t}|=2\,\mathrm{sen}\,\frac{\Delta\varphi}{2},$$

luego

$$|\kappa|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mathbf{t}}\cdot\frac{\Delta\mathbf{t}}{\Delta s}\right|=$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\left\{\left|\frac{\Delta\varphi}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{\Delta\varphi}{2}}\right|\left|\frac{\Delta\mathbf{t}}{\Delta s}\right|\right\}=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\mathbf{t}}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right|=|\mathbf{t}'|=|\alpha_2|.$$

La curvatura de flexión nos da una indicación de lo que se aparta la curva de una recta.

Se define la *curvatura de torsión* τ, o *segunda curvatura* de γ en un punto $\mathbf{x}(s_0)$ como

$$\tau = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta s}.$$

donde $\Delta\psi$ es el ángulo que forman los vectores binormales $\mathbf{b}(s_0)$ y $\mathbf{b}(s_0+\Delta s)$ en dos puntos $\mathbf{x}(s_0)$ y $\mathbf{x}(s_0+\Delta s)$ de la curva.

De manera análoga al caso anterior

$$|\mathbf{b}(s_0+\Delta s)-\mathbf{b}(s_0)| = |\Delta\mathbf{b}| = 2\,\text{sen}\,\frac{\Delta\psi}{2}$$

de donde

$$|\tau| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\psi}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\psi}{\Delta\mathbf{b}}\cdot\frac{\Delta\mathbf{b}}{\Delta s}\right| =$$

$$= \lim_{\Delta s\to 0}\left\{\left|\frac{\Delta\psi}{\Delta\mathbf{b}}\right|\left|\frac{\Delta\mathbf{b}}{\Delta s}\right|\right\} = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\psi}{2\,\text{sen}\,\frac{\Delta\psi}{2}}\right|\left|\frac{\Delta\mathbf{b}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\mathbf{b}}{\Delta s}\right| =$$

$$= \left|\frac{d\mathbf{b}}{ds}\right| = |\beta_3|.$$

En resumen

$$\begin{aligned}\mathbf{t}' &= &&-\kappa\mathbf{n}\\ \mathbf{n}' &= -\kappa\mathbf{t} &&+\tau\mathbf{b}\\ \mathbf{b}' &= &&-\tau\mathbf{n}\end{aligned}$$

que son las llamadas *fórmulas de Frenet,* las cuales nos dan la variación del triedro intrínseco.

FÓRMULAS DE LA CURVATURA DE FLEXIÓN Y DE TORSIÓN, CUANDO EL PARÁMETRO ES EL ARCO.

Sabemos que $\mathbf{t}=\mathbf{x}'(s)$ y que $\mathbf{x}''(s)=\mathbf{t}'=\kappa\mathbf{n}$, luego

$$|\kappa| = |\mathbf{x}''(s)| \Longrightarrow \kappa = \pm\sqrt{\mathbf{x}''(s)^2}.$$

También se puede calcular κ de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}'(s)\times\mathbf{x}''(s) = \mathbf{t}\times\kappa\mathbf{n} = \kappa(\mathbf{t}\times\mathbf{n}) = \kappa\mathbf{b} \Longrightarrow |\kappa| =$$

$$= |\mathbf{x}'(s)\times\mathbf{x}''(s)| \Longrightarrow \kappa = \pm\sqrt{(\mathbf{x}'(s)\times\mathbf{x}''(s))^2}.$$

Las ecuaciones anteriores indican que la ecuación de la curva determina de manera única a κ^2, pero no a κ. Se suele tomar $\mathbf{t}'$ en el mismo sentido que $\mathbf{n}$, con lo que κ será positivo. En el caso de cur-

vas planas es conveniente distinguir la concavidad y convexidad de la curva, luego si el sentido de $\mathbf{n}$ se elige de forma que dicho vector varíe con continuidad a lo largo de la curva y el vector $\mathbf{t}'=\kappa\mathbf{n}$ se orienta hacia la concavidad, dicho vector tendrá unas veces el sentido de $\mathbf{n}$ y otras el sentido opuesto, por tanto, el signo de κ podrá ser positivo o negativo.

Para calcular la curvatura de torsión τ necesitaremos la derivada tercera de $\mathbf{x}(s)$ respecto a s:

$$\mathbf{x}'''(s)=\frac{d}{ds}(\mathbf{x}''(s))=\frac{d}{ds}\mathbf{t}'=\frac{d}{ds}(\kappa(s)\mathbf{n}(s))=$$
$$=\kappa'(s)\mathbf{n}(s))+\kappa(s)\mathbf{n}'(s)=\kappa'\mathbf{n}+\kappa(-\kappa\mathbf{t}+\tau\mathbf{b})=$$
$$=-\kappa^2\mathbf{t}+\kappa'\mathbf{n}+\kappa\tau\mathbf{b}.$$

Calculemos el siguiente producto mixto:

$$[\mathbf{x}',\ \mathbf{x}'',\ \mathbf{x}''']=[\mathbf{t},\ \kappa\mathbf{n},\ -\kappa^2\mathbf{t}+\kappa'\mathbf{n}+\kappa\tau\mathbf{b}]=\kappa^2\tau[\mathbf{t},\ \mathbf{n},\ \mathbf{b}]=\kappa^2\tau$$

luego

$$\tau=\frac{[\mathbf{x}',\ \mathbf{x}'',\ \mathbf{x}''']}{\kappa^2}=\frac{[\mathbf{x}',\ \mathbf{x}'',\ \mathbf{x}''']}{\mathbf{x}''^2}.$$

Esta fórmula nos indica que la ecuación de la curva determina de manera única a τ.

Si cambiamos la orientación de la curva, es decir, si cambiamos su sentido de rceorrido, ds se transforma en $-ds$, pero como puede verse en la fórmula anterior, este cambio no afecta al signo de τ, luego dicho signo es algo intrínseco de la curva.

Expresiones de la curvatura de flexión y de la curvatura de torsión respecto a un parámetro cualquiera.

Sea $\gamma\equiv\mathbf{x}(t)$ y $t=f(s)$. Entonces

$$\mathbf{x}'(s)=\frac{d\mathbf{x}}{ds}=\frac{d\mathbf{x}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\dot{\mathbf{x}}\frac{dt}{ds},$$

$$\mathbf{x}''(s)=\frac{d}{ds}\left(\dot{\mathbf{x}}\frac{dt}{ds}\right)=\frac{d\dot{\mathbf{x}}}{ds}\cdot\frac{dt}{ds}+\dot{\mathbf{x}}\frac{d^2t}{ds^2}=\ddot{\mathbf{x}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\dot{\mathbf{x}}\frac{d^2t}{ds^2},$$

$$\mathbf{x}'''(s)=\frac{d}{ds}\left[\ddot{\mathbf{x}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\dot{\mathbf{x}}\frac{d^2t}{ds^2}\right]=\dddot{\mathbf{x}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^3+$$
$$+3\ddot{\mathbf{x}}\frac{dt}{ds}\frac{d^2t}{ds^2}+\dot{\mathbf{x}}\frac{d^3t}{ds^3}.$$

Ahora bien, de la primera relación

$$\mathbf{x}'^2=\dot{\mathbf{x}}^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2,$$

pero $\mathbf{x}'^2=1$, luego

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=\frac{1}{\dot{\mathbf{x}}^2}.$$

Entonces

$$\kappa^2=(\mathbf{x}'\times\mathbf{x}'')^2=\left[\dot{\mathbf{x}}\frac{dt}{ds}\times\left(\ddot{\mathbf{x}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\dot{\mathbf{x}}\frac{d^2t}{ds}\right)\right]^2=$$

$$=\left[\dot{\mathbf{x}}\frac{dt}{ds}\times\ddot{\mathbf{x}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\right]^2=\left(\frac{dt}{ds}\right)^6(\dot{\mathbf{x}}\times\dot{\mathbf{x}})=\frac{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})^2}{(\dot{\mathbf{x}}^2)^3}$$

y por tanto,

$$\kappa=\frac{\pm\sqrt{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})^2}}{(\dot{\mathbf{x}}^2)^{3/2}}.$$

Teniendo en cuenta que

$$[\mathbf{x}',\ \mathbf{x}'',\ \mathbf{x}''']=\left[\dot{\mathbf{x}}\frac{dt}{ds},\ \ddot{\mathbf{x}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\dot{\mathbf{x}}\frac{d^2t}{ds^2},\ \dddot{\mathbf{x}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^3+\right.$$

$$\left.+3\ddot{\mathbf{x}}\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d^2t}{ds^2}+\dot{\mathbf{x}}\frac{d^3t}{ds^3}\right]=\left(\frac{dt}{ds}\right)^6[\dot{\mathbf{x}},\ \ddot{\mathbf{x}},\ \dddot{\mathbf{x}}],$$

la curvatura de torsión vendrá dada por

$$\tau=\frac{\left(\frac{dt}{ds}\right)^6[\dot{\mathbf{x}},\ \ddot{\mathbf{x}},\ \dddot{\mathbf{x}}]}{\left(\frac{dt}{ds}\right)^6(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})^2}=\frac{[\dot{\mathbf{x}},\ \ddot{\mathbf{x}},\ \dddot{\mathbf{x}}]}{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})}.$$

A las inversas de las curvaturas de flexión y de la curvatura de torsión, se les llama *radio de flexión* R y *radio de torsión* T, respectivamente.

EJEMPLO 1. La curva del ejemplo del párrafo anterior tiene en el punto $\mathbf{x}(1)$

$$\kappa=\frac{\pm\sqrt{1+16}}{(16+1+1)^{3/2}}=\frac{\pm\sqrt{34}}{108}$$

y $\tau=0$.

EJERCICIOS

1. Demuéstrese que si la curva γ es plana y viene dada en forma paramétrica $x_1=x_1(t)$, $x_2=x_2(t)$, la expresión de la curvatura de flexión es

$$\kappa=\frac{\dot{x}_1\ddot{x}_2-\dot{x}_2\ddot{x}_1}{(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)^{3/2}}$$

y si viene dada en forma explícita: $x_2=f(x_1)$

$$\kappa=\frac{f''(x_1)}{(1+f'(x_1)^2)^{3/2}}.$$

2. Dada la curva

$$\gamma\equiv\begin{cases}x_1=2\,\mathrm{tg}\,t\\ x_2=2\,\mathrm{cotg}\,t\\ x_3=2\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,\mathrm{cotg}\,t\end{cases}$$

calcúlense los valores de las curvaturas de flexión y torsión en el punto correspondiente al valor del parámetro $t=60^\circ$.

3. Hállese la ecuación del plano osculador a la curva

$$\begin{cases}x_1=2t\cos t\\ x_2=2t\,\mathrm{sen}\,t\\ x_3=3t\end{cases}$$

correspondiente al menor valor no negativo del parámetro en el que la curvatura de torsión vale $\frac{9}{26}$.

4. Hállense las curvaturas de flexión y torsión de la curva

$$\gamma\equiv\begin{cases}x_3^3-3x_3^2+7x_3=5-8x_2\\ x_3^2-4x_1-2x_3=3\end{cases}$$

en el punto $(0,\ 2,\ -1)$.

5. Hállense los elementos del triedro intrínseco en los puntos reales de la curva

$$\gamma\equiv\begin{cases}x_1=2t\\ x_2=t^2\\ x_3=\frac{2}{3}t^3\end{cases}$$

en los que $\tau=\frac{1}{6}$.

JAR'23

25

Superficies

25.1. Concepto de superficie.

Se llama *superficie* a la imagen de una aplicación φ: $R \longrightarrow E_3$, donde R es un subconjunto de E_2, que supondremos siempre compuesto por los puntos de una curva de Jordan cerrada y los puntos interiores a ella. Elegidos en E_2 y E_3, sendos sistemas de referencia, la ecuación de una superficie puede venir dada en la forma

$$S \equiv \begin{cases} x_1 = x_1(u, v) \\ x_2 = x_2(u, v) \\ x_3 = x_3(u, v) \end{cases} \qquad (u, v) \in R \tag{223}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la superficie. De acuerdo con la terminología intuitiva que ya hemos utilizado anteriormente, una superficie es una doble infinidad de puntos de E_3. Las funciones $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$ y $x_3(u, v)$ las supondremos siempre continuas y tantas veces diferenciables como sea necesario.

EJEMPLO 1. $x_1 = r \cos u \operatorname{sen} v$, $x_2 = r \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$, $x_3 = r \cos v$, son ecuaciones paramétricas de la superficie esférica de centro el origen de coordenadas y radio r.

EJEMPLO 2.

$$x_1 = 3 + 2\lambda - 5\mu, \qquad x_2 = 1 + 6\lambda - 5\mu, \qquad x_3 = -3 + 2\lambda + 2\mu$$

son, como sabemos, las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $(3, 1, -3)$ y cuya variedad lineal de dirección es la engendrada por los vectores $(2, 6, 2)$ y $(-5, -5, 2)$.

Eliminando los parámetros entre las tres ecuaciones paramétricas de una superficie, se obtendría una relación de la forma

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

que es la ecuación implícita de dicha superficie. Si en ella fuera posible despejar una de las variables, por ejemplo, x_3, obtendríamos

$$x_3 = f(x_1,\ x_2)$$

que es la ecuación en forma explícita de la superficie. Nosotros sólo estaremos interesados en *superficies uniformes*, que son aquéllas en que cada paralela al eje de las x_3 las corta a lo sumo en un punto. Es evidente que en este caso f tiene que ser una función.

EJEMPLO 3. Eliminando los parámetros u y v en las ecuaciones del ejemplo 1, obtendríamos

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$$

y despejando x_3 tendríamos

$$x_3 = \pm\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2},$$

que no representaría una superficie uniforme, pero que se puede descomponer, para su estudio, en dos superficies uniformes, a saber:

$$x_3 = +\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}, \qquad x_3 = -\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}.$$

PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL.

Si en las ecuaciones paramétricas (223) de una superficie damos el valor constante u_o al primer parámetro, obtenemos las ecuaciones paramétricas.

$$x_1 = x_1(u_o,\ v), \qquad x_2 = x_2(u_o,\ v), \qquad x_3 = x_3(u_o,\ v)$$

de una curva situada sobre la superficie. Análogamente, si damos a v un valor fijo v_o, obtendremos otra curva sobre la superficie. Las curvas $u = \text{cte.}$ y $v = \text{cte.}$, constituyen sendas familias de curvas sobre la superficie, a las que se llama *curvas de coordenadas*. Por cada punto de la superficie pasa al menos una curva de cada familia.

EJEMPLO 4. En el ejemplo 1 las curvas $u = \text{cte.}$ son los paralelos de la superficie esférica y las $v = \text{cte.}$ son los meridianos de dicha superficie.

Dada una superficie en forma implícita $F(x_1,\ x_2,\ x_3) = 0$ la condición para que una curva $\gamma \equiv x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ x_3 = x_3(t)$, esté si-

tuada sobre la superficie, es que para todo valor del parámetro t del intervalo de definición de la curva, se verifique

$$F(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))=0.$$

Vamos a tratar de hallar el lugar geométrico de los puntos de las tangentes a todas las curvas de una superficie que pasan por un punto $P\ (p_1, p_2, p_3)$. Si

$$\gamma\equiv\begin{cases} x_1=x_1(t)\\ x_2=x_2(t)\\ x_3=x_3(t)\end{cases}$$

es una curva de la superficie que pasa por P, se tiene que verificar

$$F(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))=0,$$

como hemos visto. Derivando ambos miembros respecto al parámetro t, tenemos

$$F_{x_1}\cdot x_1'(t_0)+F_{x_2}\cdot x'(t_0)+F_{x_3}\cdot x'(t_0)=0. \tag{224}$$

Por otra parte, la ecuación de la tangente a la curva en el punto P tiene por ecuaciones

$$\frac{x_1-p_1}{x_1'(t_0)}=\frac{x_2-p_2}{x_2'(t_0)}=\frac{x_3-p_3}{x_3(t_0)}. \tag{225}$$

Eliminando $x_1'(t_0)$, $x_2'(t_0)$, $x_3'(t_0)$ entre las ecuaciones (224) y (225) obtenemos la ecuación del lugar buscado

$$F_{x_1}(x_1-p_1)+F_{x_2}(x_2-p_2)+F_{x_3}(x_3-p_3)=0. \tag{226}$$

Pero ésta es la ecuación de un plano, al que se llama *plano tangente* a la superficie en el punto P. Hemos supuesto, naturalmente, que las derivadas parciales primeras de F respecto a x_1, x_2 y x_3, respectivamente, no se anulan simultáneamente en el punto P. A los puntos de la superficie en que esto ocurre se les llama *puntos ordinarios*. A los puntos que no son ordinarios se les llama *puntos singulares*. Nosotros excluiremos estos puntos de nuestro estudio.

Se llama *recta normal* a una curva en un punto, a la recta perpendicular al plano tangente a la superficie en dicho punto. Un vector característico del plano tangente es el $(F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3})$ y este vector será un vector de dirección de la recta normal, luego las ecuaciones de ésta en el punto P serán

$$\frac{x_1-p_1}{F_{x_1}}=\frac{x_2-p_2}{F_{x_2}}=\frac{x_3-p_3}{F_x}. \tag{227}$$

EJEMPLO 5. La ecuación del plano tangente a la superficie esférica de ecuación $x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2$ en el punto $\left(\frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}\right)$ es

$$x_1+x_2+x_3-\sqrt{3}\,r=0$$

y las de la recta normal

$$\sqrt{3}\,x_1-r=\sqrt{3}\,x_2-r=\sqrt{3}\,x_3-r.$$

Si la superficie viniera dada en forma explícita, $x_3=f(x_1, x_2)$, entonces

$$F_{x_1}=f_{x_1}, \quad F_{x_2}=f_{x_2}, \quad F_{x_3}=-1,$$

luego las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal serían

$$x_3-p_3=f_{x_1}(x_1-p_1)+f_{x_2}(x_2-p_2) \tag{228}$$

y

$$\frac{x_1-p_1}{f_{x_1}}=\frac{x_2-p_2}{f_{x_2}}=\frac{x_3-p_3}{-1}. \tag{229}$$

EJEMPLO 6. Las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie $x_3=2x_1x_2^3$ en el punto $(2, -1, -4)$ son, respectivamente,

$$x_3+4=-2(x_1-2)+12(x_2+1)$$

$$\frac{x_1-2}{-2}=\frac{x_2+1}{12}=\frac{x_3+4}{-1}.$$

Si la curva viene dada en forma paramétrica, entonces un vector característico del plano tangente a la superficie en el punto $\mathbf{x}(u_o, v_o)$ es el $\mathbf{x}_u(u_o, v_o)\times\mathbf{x}_v(u_o, v_o)$, puesto que los vectores $\mathbf{x}_u(u_o, v_o)$ y $\mathbf{x}_v(u_o, v_o)$ son paralelos a dicho plano, por ser vectores de dirección de las curvas de coordenadas que pasan por dicho punto. La ecuación del plano tangente es, por tanto,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix}(x_1-x_1(u_o, v_o))+\begin{vmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_3}{\partial v} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \end{vmatrix}(x_2-x_2(u_o, v_o))+$$

$$+\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{vmatrix}(x_3-x_3(u_o, v_o))=0, \tag{230}$$

y las de la recta normal

$$(231)\qquad \frac{x_1-x_1(u_o,\,v_o)}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix}}=\frac{x_2-x_2(u_o,\,v_o)}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial u} \\ \frac{\partial x_3}{\partial v} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \end{vmatrix}}=\frac{x_3-x_3(u_o,\,v_o)}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{vmatrix}}.$$

Las derivadas parciales respecto a u y v están particularizadas para el punto en cuestión.

EJEMPLO 7. Sea la superficie $x_1=u^2+v$, $x_2=uv$, $x_3=u^3-2uv$. Su plano tangente y recta normal en el punto correspondiente a los valores del parámetro $u=3$, $v=-2$, tienen por ecuaciones

$$105(x_1-7)+67(x_2+6)+20(x_3-21)=0$$

y

$$\frac{x_1-7}{105}=\frac{x_2+6}{67}=\frac{x_3-21}{20}.$$

CONTORNO APARENTE.

Sea la superficie de ecuación implícita $F(x_1, x_2, x_3)=0$. El sistema

$$(232)\qquad \begin{cases} F(x_1,\,x_2,\,x_3)=0 \\ F_{x_3}(x_1,\,x_2,\,x_3)=0 \end{cases}$$

representa a una curva de la superficie cuyos puntos cumplen la condición de que el plano tangente en ellos a la superficie es paralelo al eje Ox_3. A esta curva se le llama *contorno aparente* de la superficie respecto al eje Ox_3.

EJEMPLO 8. El contorno aparente de la superficie

$$S\equiv(x_1-2)^2+(x_2+4)^2+(x_3-1)^2-9=0$$

(superficie esférica de centro el punto $(2, -4, 1)$ y radio 3) tiene como contorno aparente respecto a Ox_3, la curva

$$\gamma\equiv\begin{cases} (x_1-2)^2+(x_2+4)^2+(x_3-1)^2-9=0 \\ (x_3-1)=0 \end{cases}$$

pero este sistema es equivalente al

$$\gamma\equiv\begin{cases} (x_1-2)^2+(x_2+4)^2-9=0 \\ (x_3-1)=0 \end{cases}$$

que representa una circunferencia de centro $(2, -4, 1)$ y radio 3, en el plano $x_3-1=0$.

EJERCICIOS

1. Hállese el lugar geométrico de los puntos de las normales a la superficie $25x_1^2 - x_1^2x_3^2 - 4x_2^2 = 0$ trazadas por la curva de esta superficie

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 - 4 \quad = 0 \end{cases}.$$

2. Hállese la proyección sobre el plano Ox_2x_3 del contorno aparente respecto al eje Ox_3 de la superficie

$$x_1^2x_3^3 - (x_2 - x_3 + 3)(2x_3^2 - x_2 + x_3 - 3)^2 = 0.$$

3. Dada la superficie $x_1 = v\cos u$, $x_2 = v \operatorname{sen} u$, $x_3 = kv + f(u)$, demuéstrese que los planos tangentes en los puntos de la curva de coordenadas $u = \text{cte.}$ forman un haz de planos. Hállese la arista de dicho haz.

4. Hállese el plano tangente y la normal principal a la superficie $x_1^6 + 4x_2^2 - 4x_3^2 = 0$ en el punto (2, 0, 4).

5. Hállese el plano tangente a la superficie $x_1 = u^2 - v^2$, $x_2 = u + v$, $x_3 = u^2 + 4v$, en el punto $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -2)$.

6. Demuéstrese que la superficie

$$x_1 = 3 \operatorname{Sh} u \operatorname{Sh} v, \qquad x_2 = 4 \operatorname{Sh} u \operatorname{Ch} v, \qquad x_3 = \operatorname{Sh} u$$

es un cono, hállese su vértice y compruébese que el plano tangente en dicho vértice a la superficie está indeterminado.

7. Hállese el ángulo que forma la curva $x_1 = t$, $x_2 = t^2$, $x_3 = t^3$ y la superficie $x_3 = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2$.

25.2. Superficies regladas.

Se llama *superficie reglada* a toda superficie engendrada por una recta variable denominada *generatriz*. Las ecuaciones paramétricas de una superficie reglada pueden venir dadas en la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1(u) + v\alpha_1(u) \\ x_2 &= a_2(u) + v\alpha_2(u) \\ x_3 &= a_3(u) + v\alpha_3(u). \end{aligned} \tag{233}$$

Las curvas de coordenadas correspondientes a $u = \text{cte.}$ son las generatrices rectilíneas de la superficie.

De acuerdo con (230) la ecuación del plano tangente a la superficie reglada de ecuaciones paramétricas (233) es

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1(u, v) & x_2 - x_2(u, v) & x_3 - x_3(u, v) \\ a_1'(u) + v\alpha_1'(u) & a_2'(u) + v\alpha_2'(u) & a_3'(u) + v\alpha_3'(u) \\ \alpha_1(u) & \alpha_2(u) & \alpha_3(u) \end{vmatrix} = 0$$

Restando de la primera fila la tercera multiplicada por v, tenemos:

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1(u) & x_2 - a_2(u) & x_3 - a_3(u) \\ a_1'(u) + v\alpha_1'(u) & a_2'(u) + v\alpha_2'(u) & a_3'(u) + v\alpha_3'(u) \\ \alpha_1(u) & \alpha_2(u) & \alpha_3(u) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 - a_1(u) & x_2 - a_2(u) & x_3 - a_3(u) \\ a_1'(u) & a_2'(u) & a_3'(u) \\ \alpha_1(u) & \alpha_2(u) & \alpha_3(u) \end{vmatrix} +$$

$$+ v \begin{vmatrix} x_1 - a_1(u) & x_2 - a_2(u) & x_3 - a_3(u) \\ \alpha_1'(u) & \alpha_2'(u) & \alpha_3'(u) \\ \alpha_1(u) & \alpha_2(u) & \alpha_3(u) \end{vmatrix} = \pi + v\pi',$$

pero ésta es la ecuación de un haz de planos, por tanto:

a) el plano tangente en un punto de la superficie contiene a la generatriz rectilínea que pasa por ese punto;

b) los planos tangentes a la superficie a lo largo de una generatriz, forman un haz de planos, cuya arista es dicha generatriz.

La ecuación $\pi' = 0$ corresponde al plano tangente a la superficie reglada en el punto del infinito de la generatriz correspondiente. Se le llama *plano asintótico.*

Se denomina *plano central* correspondiente a una generatriz al plano tangente a la superficie, perpendicular al plano asintótico de dicha generatriz, y *punto central* al punto de tangencia del plano central. Al lugar geométrico de los puntos centrales se le llama *línea de estricción* de la superficie.

A las superficies regladas que tienen el mismo plano tangente en todos los puntos de una misma generatriz, se les denomina *superficies desarrollables.*

Para que una superficie reglada sea desarrollable, es suficiente que el haz $\pi + v\pi'$ de planos tangentes a lo largo de una generatriz cualquiera sea degenerado, y para eso basta con que:

a) $\pi = 0$. Pero esto implica que

$$\frac{a_1'}{\alpha_1} = \frac{a_2'}{\alpha_2} = \frac{a_3'}{\alpha_3}.$$

Ahora bien, el vector (a_1', a_2', a_3') es tangente a la curva de coordenadas de la superficie, correspondiente a $v=0$, luego la superficie reglada está engendrada por todas las rectas tangentes a dicha curva. Se le llama *superficie tangencial.*

b) $\pi'=0$. Pero esto equivale a que

$$\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}=\frac{\alpha_2'}{\alpha_2}=\frac{\alpha_3'}{\alpha_3},$$

e integrando respecto a u, obtenemos $\alpha_2=\lambda\alpha_1$, $\alpha_3=\mu\alpha_1$. Es decir, las generatrices de la superficie reglada son paralelas a una dirección fija. A este tipo de superficies se les llama superficies *cilíndricas.*

c) $\pi\equiv\pi'$. Para ello es necesario y suficiente que

$$\begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3' \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}=0$$

o, lo que es lo mismo:

$$a_1'+\lambda\alpha_1'=\mu\alpha_1, \qquad a_2'+\lambda\alpha_2'=\mu\alpha_2' \qquad a_3'+\lambda\alpha_3'=\mu\alpha_3,$$

donde λ y μ son funciones de u. Las igualdades anteriores se pueden escribir en la forma

$$\frac{a_1'+\lambda\alpha_1'}{\alpha_1}=\frac{a_2'+\lambda\alpha_2'}{\alpha_2}=\frac{a_3'+\lambda\alpha_3'}{\alpha_3}=\mu,$$

luego, el punto correspondiente al valor del parámetro $v=\lambda$ describe una curva tangente a la generatriz. En el caso particular en que $\mu=-\lambda$ la superficie está engendrada por rectas que pasan por un punto fijo. A este tipo de superficies se les llama *superficies cónicas,* y al punto fijo se le llama *vértice.*

A la curva de coordenadas correspondiente a $v=0$ se le llama *arista de retroceso* de la superficie desarrollable.

Superficies cónicas.

Tratemos de determinar la ecuación de la superficie cónica de vértice el punto $P\ (p_1, p_2, p_3)$. Las generatrices de dicha superficie cónica pertenecen a la radiación de rectas de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1-p_1&=\lambda\,(x_3-p_3) \\ x_2-p_2&=\mu\,(x_3-p_3). \end{aligned} \tag{234}$$

La superficie cónica estará definida por una condición impuesta a los parámetros,

$$F(\lambda,\ \mu)=0, \tag{235}$$

luego eliminando los parámetros entre las ecuaciones (234) y (235), obtenemos

$$F\left(\frac{x_1-p_1}{x_3-p_3},\ \frac{x_2-p_2}{x_3-p_3}\right)=0 \tag{236}$$

o bien,

$$f(x_1-p_1,\ x_2-p_2,\ x_3-p_3)=0, \tag{236'}$$

que es la ecuación de la superficie cónica.

La función f de la ecuación anterior es homogénea en x_1-p_1, x_2-p_2, x_3-p_3. Recíprocamente, toda función homogénea en dichas tres cantidades, igualada a cero, representa a una superficie cónica de vértice el punto P. En efecto, si el punto Q es otro punto de la superficie, se tiene

$$f(q_1-p_1,\ q_2-p_2,\ q_3-p_3)=0,$$

entonces todo punto $x_i=p_i+\lambda(q_i-p_i)$ de la recta PQ también verifica dicha ecuación, pues

$$f(\lambda(q_1-p_1),\ \lambda(q_2-p_2),\ \lambda(q_3-p_3))=\lambda f(q_1-p_1,\ q_2-p_2,\ q_3-p_3)=0$$

y, por tanto, dicha recta está contenida totalmente en la superficie.

Si el punto P viniera dado como intersección de tres planos, π_1, π_2, π_3, las ecuaciones de la radiación de rectas de vértice el punto P serían

$$\pi_1=\lambda\pi_3, \qquad \pi_2=\mu\pi_3, \tag{237}$$

y, eliminando los parámetros λ y μ entre (235) y (237), obtendríamos como ecuación de la superficie cónica

$$F\left(\frac{\pi_1}{\pi_3},\ \frac{\pi_2}{\pi_3}\right)=f(\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3)=0, \tag{238}$$

siendo f homogénea en π_1, π_2, π_3.

EJEMPLO 1. Ecuación de la superficie cónica de vértice el punto $(1, -1, 2)$ y cuyas generatrices se apoyan en la curva (*directriz*)

$$\gamma\equiv\begin{cases}x_1^2+x_2^2=0\\ x_3=0\end{cases}$$

Eliminando x_1, x_2, x_3 entre las ecuaciones de la directriz y las de la radiación de rectas de vértice el punto $(1, -1, 2)$, obtenemos la relación

$$F(\lambda,\ \mu)=(1-2\lambda)^2+(1+2\mu)^2-4=0,$$

y llevando a esta relación los valores de λ y μ despejados de las ecuaciones de la radiación, obtendríamos finalmente como ecuación de la superficie cónica

$$4x_1^2+4x_2^2-2x_3^2-4x_1x_3+4x_2x_3+16x_3-16=0.$$

EJEMPLO 2. Ecuación de la superficie cónica de vértice el origen y generatrices tangentes a la superficie

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1+4=0.$$

Hallemos la intersección de la recta $x_1=\lambda x_3$, $x_2=\mu x_3$ con la superficie, con lo que obtendremos la ecuación

$$(\lambda^2+\mu^2+1)x_3^2-2\lambda x+4=0.$$

Si la recta en cuestión ha de ser tangente a la superficie, esta ecuación tiene que tener una raíz doble, luego

$$F(\lambda,\ \mu)=\lambda^2-4(\lambda^2+\mu^2+1)=0,$$

y sustituyendo en esta ecuación λ y μ por $\dfrac{x_1}{x_3}$ y $\dfrac{x_2}{x_3}$, obtenemos, después de simplificar, la ecuación

$$3x_1^2+4x_2^2+4x_3^2=0,$$

que representa un cono imaginario.

Si la directriz viniera dada en forma paramétrica:

$$\gamma\equiv\begin{cases}x_1=x_1(t)\\ x_2=x_2(t)\\ x_3=x_3(t)\end{cases}$$

si X es un punto cualquiera de una generatriz cualquiera de la superficie cónica, tenemos

$$\{\overrightarrow{OX}\}=\{\overrightarrow{OP}\}+\{\overrightarrow{PX}\}=\{\overrightarrow{OP}\}+\lambda\{\overrightarrow{PY}\}=\{\overrightarrow{OP}\}+\lambda[\{\overrightarrow{OY}\}-\{\overrightarrow{OP}\}],$$

luego si llamamos $\mathbf{X}(\lambda,\ t)$ al vector de posición del punto genérico de la superficie, $\mathbf{p}$ al vector de posición del vértice y $\mathbf{x}(t)$ al vector de posición de la directriz, la ecuación vectorial de la superficie cónica es

$$\mathbf{x}(\lambda,\ t)=\mathbf{p}+\lambda(\mathbf{x}(t)-\mathbf{p}) \tag{239}$$

equivalente a

$$(240)\qquad \begin{aligned} x_1(\lambda, t) &= p_1 + \lambda(x_1(t) - p_1) \\ x_2(\lambda, t) &= p_2 + \lambda(x_2(t) - p_2) \\ x_3(\lambda, t) &= p_3 + \lambda(x_3(t) - p_3) \end{aligned}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la superficie cónica.

EJEMPLO 3. Las ecuaciones paramétricas de la superficie cónica de vértice el punto P $(1, -1, 2)$ y directriz la curva de ecuaciones $x_1 = 2\cos t$, $x_2 = 2\operatorname{sen} t$, $x_3 = 0$, son

$$\begin{aligned} x_1(\lambda, t) &= 1 + \lambda(2\cos t - 1) \\ x_2(\lambda, t) &= -1 + \lambda(2\operatorname{sen} t + 1) \\ x_3(\lambda, t) &= 2 - 2\lambda \end{aligned}$$

y eliminando los parámetros λ y t obtenemos la correspondiente ecuación implícita:

$$4x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 16x_3 - 16 = 0.$$

PLANO TANGENTE A UNA SUPERFICIE CÓNICA.

De acuerdo con (230), el plano tangente a la superficie cónica de ecuaciones paramétricas (240) es

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1(\lambda, t) & x_2 - x_2(\lambda, t) & x_3 - x_3(\lambda, t) \\ x_1(t) - p_1 & x_2(t) - p_2 & x_3(t) - p_3 \\ \lambda x_1'(t) & \lambda x_2'(t) & \lambda x_3'(t) \end{vmatrix} = 0$$

de donde, restando de la primera fila la segunda multiplicada por λ y sacando factor común λ de la tercera, obtenemos finalmente como ecuación del plano tangente en un punto de la superficie cónica

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 & x_3 - p_3 \\ x_1(t) - p_1 & x_2(t) - p_2 & x_3(t) - p_3 \\ x_1'(t) & x_2'(t) & x_3'(t) \end{vmatrix} = 0$$

que al no depender de λ nos indica que todos los puntos de una misma generatriz poseen el mismo plano tangente.

SUPERFICIES CILÍNDRICAS.

Tratemos de determinar la ecuación de una superficie cilíndrica de generatrices paralelas a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x_1 = v_1 x_3 \\ x_2 = v_3 x_3 \end{cases}$$

Las ecuaciones de la radiación impropia de rectas a la que han de pertenecer las generatrices son:

$$\begin{cases} x_1 = v_1 x_3 + \lambda \\ x_2 = v_2 x_3 + \mu \end{cases}.$$

La superficie cilíndrica estará definida por una relación

$$F(\lambda,\ \mu) = 0$$

impuesta a dichas rectas, luego su ecuación será

$$F(x_1 - v_1 x_3,\ x_2 - v_2 x_3) = 0.$$

Si la recta que determina la dirección de las generatrices de la superficie cilíndrica viniera dada como intersección de los planos π_1 y π_2, las ecuaciones de la radiación impropia de rectas a la que pertenecen las generatrices es

$$\begin{cases} \pi_1 = \lambda \\ \pi_2 = \mu \end{cases}$$

y entonces la ecuación de la superficie cilíndrica será

$$F(\pi_1,\ \pi_2) = 0.$$

EJEMPLO 4. La ecuación de la superficie cilíndrica engendrada por todas las rectas paralelas a la recta r, de ecuaciones $x_1 = 3x_3$, $x_2 = 5x_3$ que se apoyan en la curva (directriz) intersección de las superficies dadas por $x_2 = 4x_3^2$ y $x_1 = 0$, se obtiene eliminando x_1, x_2, x_3 entre las ecuaciones

$$x_1 = 3x_3 + \lambda \qquad\qquad x_2 = 4x_3^2$$

$$\text{y}$$

$$x_2 = 5x_3 + \mu \qquad\qquad x_1 = 0$$

que nos da

$$F(\lambda,\ \mu) = 4\lambda^2 + 15\lambda - 9\mu = 0$$

y llevando los valores $\lambda = x_1 - 3x_3$ y $\mu = x_2 - 5x_3$ a dicha relación tenemos finalmente la ecuación pedida:

$$4x_1^2 + 36x_3^2 - 24x_1x_3 + 15x_1 - 9x_2 = 0.$$

EJEMPLO 5. La ecuación de la superficie cilíndrica de generatrices paralelas a la recta r, de ecuaciones $x_1 = 2x_3$, $x_2 = x_3$, que son tangentes a la superficie de ecuación

$$x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 1 = 0,$$

se obtiene hallando la intersección de las rectas de ecuaciones $x_1 = 2x_3 + \lambda$, $x_2 = x_3 + \mu$ con la superficie y obligando a que dicha intersección sea doble, lo que nos da la condición

$$F(\lambda, \mu) = \lambda^2 - 2\mu^2 + 8\lambda\mu - 3 = 0$$

y sustituyendo en ella λ y μ por $x_1 - 2x_3$ y $x_2 - x_3$, respectivamente, tenemos

$$x_1^2 - 2x_2^2 + 18x_3^2 + 8x_1x_2 - 12x_1x_3 - 12x_2x_3 - 3 = 0$$

que es la ecuación pedida.

Si la curva directriz viniera dada en forma paramétrica $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = x_3(t)$ y la dirección de las generatrices mediante el vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, si X es un punto cualquiera de una generatriz cualquiera de la superficie cilíndrica, se verifica

$$\{\overrightarrow{OX}\} = \{\overrightarrow{OY}\} + \{\overrightarrow{YX}\}$$

luego si llamamos $\mathbf{x}(\lambda, t)$ al vector de posición de un punto genérico de la superficie, tenemos

$$\mathbf{x}(\lambda, t) = \mathbf{x}(t) + \lambda\mathbf{v} \tag{241}$$

que es la ecuación vectorial de la superficie cilíndrica, la cual es equivalente a las

$$\begin{aligned} x_1(\lambda, t) &= x_1(t) + \lambda v_1 \\ x_2(\lambda, t) &= x_2(t) + \lambda v_2 \\ x_3(\lambda, t) &= x_3(t) + \lambda v_3 \end{aligned} \tag{242}$$

que son las ecuaciones paramétricas de dicha superficie.

EJEMPLO 6. Las ecuaciones paramétricas de la superficie cilíndrica de generatrices paralelas al vector $\mathbf{v} = (3, 1, 2)$ y directriz de ecuaciones $x_1 = t^2$, $x_2 = 2t + 1$, $x_3 = t^2 + 1$, son

$$\begin{aligned} x_1(\lambda, t) &= t^2 + 3\lambda \\ x_2(\lambda, t) &= 2t + 1 + \lambda \\ x_3(\lambda, t) &= t^2 + 1 + 2\lambda \end{aligned}$$

PLANO TANGENTE A UNA SUPERFICIE CILÍNDRICA.

De acuerdo con (230), la ecuación del plano tangente a la superficie cilíndrica de ecuaciones paramétricas (242) es

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1(\lambda, t) & x_2 - x_2(\lambda, t) & x_3 - x_3(\lambda, t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & x_3'(t) \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0,$$

y restando a la primera fila la tercera multiplicada por λ tenemos:

$$\begin{vmatrix} x_1-x_1(t) & x_2-x_2(t) & x_3-x_3(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & x_3'(t) \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=0$$

que es la ecuación del plano tangente a la superficie cilíndrica en un punto y que, al no depender de λ, nos indica que todos los puntos de una misma generatriz tienen el mismo plano tangente.

Conoides.

Se llama *conoide* a la superficie engendrada por una recta paralela a un plano fijo y que se apoya en una recta fija.

Si el plano fijo es el $\pi_1=0$ y la recta viene dada como intersección de dos planos,

$$r\equiv\begin{cases}\pi_2=0\\ \pi_3=0\end{cases},$$

el conjunto de rectas paralelas a π_1 y que se apoyan en la recta, viene dado por las ecuaciones

$$r(\lambda,\ \mu)\equiv\begin{cases}\pi_2+\lambda\pi_3=0\\ \pi_1=\mu\end{cases}$$

El conoide vendrá determinado por una condición impuesta a dichas rectas

$$F(\lambda,\ \mu)=0,$$

luego la ecuación del conoide es

$$F\left(\frac{\pi_2}{\pi_3},\ \pi_1\right)=0.$$

Al plano π_1 se le llama plano director del conoide. Si la recta r es perpendicular la plano director se dice que el conoide es *recto.*

Ejemplo 7. Ecuación del conoide recto engendrado por las rectas que se apoyan en el eje Ox_3, son paralelas al plano $x_3=0$, y se apoyan en la circunferencia

$$C\equiv\begin{cases}x_1^2+x_2^2-2x_1=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}.$$

Eliminamos x_1, x_2, x_3 entre las ecuaciones

$$r(\lambda,\ \mu)\equiv\begin{cases}x_1+\lambda x_2=0\\ x_3=\mu\end{cases}\qquad C\equiv\begin{cases}x_1^2+x_2^2-2x_1=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}$$

obteniendo

$$F(\lambda,\ \mu)=\lambda^2\mu+\mu+2\lambda=0$$

y sustituyendo en ella λ y μ por $-\dfrac{x_1}{x_2}$ y x_3, respectivamente, obtenemos la ecuación pedida:

$$x_1^2x_3+x_2^2x_3-2x_1x_2=0.$$

EJERCICIOS

1. Hállese la ecuación de la superficie engendrada por las rectas que se apoyan en las

$$r_1\equiv\begin{cases}2x_1+x_2-2=0\\ x_3=0\end{cases}\qquad r_2\equiv\begin{cases}x_2+x_3=1\\ x_1=0\end{cases}\qquad r\equiv\begin{cases}x_3-4=0\\ x_2=0\end{cases}$$

2. Hállese la ecuación de la superficie engendrada por las rectas que se apoyan en la circunferencia C, en el eje Ox_3 y en la recta r:

$$C\equiv\begin{cases}(x_1-2)^2+(x_2-2)^2-16=0\\ x_3=0\end{cases}\qquad r\equiv\begin{cases}x_1+x_2-4=0\\ x_1-x_3-4=0\end{cases}.$$

3. Hállese en forma implícita la ecuación de la superficie desarrollable cuya arista de retroceso es la curva de ecuaciones paramétricas

$$x_1=t,\qquad x_2=t^2,\qquad x_3=t^3.$$

4. Hállese la superficie cónica de vértice el origen y directriz la curva intersección de las superficies de ecuaciones

$$x_1-2=0\qquad x_2^2+4x_3^2-4=0.$$

5. Hállese el ángulo que forman las generatrices rectilíneas que pasan por el punto (1, 4, 2) de la superficie

$$4x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4=0.$$

6. Hállese la ecuación de la superficie cónica de vértice el punto (3, 2, 0) y directriz la curva intersección de la superficie de ecuación

$$x_2^2+2x_3^2+2x_2x_3-4x_2-13x_3+13=0$$

con el plano $x_1=0$.

7. Averígüese si la ecuación

$$25x_1^2+25x_2^2+4x_3^2-20x_1x_3-30x_2x_3+90x_3-225=0,$$

representa una superficie cónica y, caso afirmativo, hállese su vértice.

8. Hállese la ecuación de la superficie cilíndrica de generatrices paralelas al vector $\mathbf{v}=(2, 1, 1)$ y directriz la curva intersección de la superficie de ecuación

$$-x_3^3-2x_1^2-6x_3^2+7x_1x_3=0$$

con el plano $x_2=0$.

9. Averígüese si la ecuación

$$(2x_2-x_1)^2-(x_3-x_2)=0$$

representa una superficie cilíndrica y, caso afirmativo, hállese la dirección de las generatrices.

10. Hállese la ecuación del conoide engendrado por las rectas que se apoyan sobre el eje Ox_3, son paralelas al plano Ox_1x_2 y tales que su mínima distancia a la recta $2x_1=2x_2=x_3$ sea cuatro unidades.

25.3. Superficies de revolución. Superficies de traslación.

Se llama superficie de revolución a la engendrada por una curva C al girar alrededor de una recta r. A las curvas intersección de la superficie de revolución con un plano cualquiera que pase por la recta r, se les llama *meridianos* y a las de intersección de la superficie con un plano perpendicular a r se les llama *paralelos*.

Se puede considerar a la superficie como el lugar geométrico de los puntos de las circunferencias situadas sobre planos perpendiculares al eje r y con centro en *él* (paralelos) y que se apoyan en un meridiano.

Si las ecuaciones del eje r son

$$\frac{x_1-a_1}{v_1}=\frac{x_2-a_2}{v_2}=\frac{x_3-a_3}{v_3},$$

las ecuaciones de los paralelos serán

$$C(\lambda,\ \mu)\equiv\begin{cases}(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2=\lambda\\ v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3=\mu\end{cases}$$

La superficie de revolución vendrá determinada por una condición

$$F(\lambda,\ \mu)=0$$

impuesta a dichos paralelos, luego la ecuación de la superficie será:

$$F((x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2,\ v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3)=0.$$

EJEMPLO 1. Ecuación de la superficie de revolución engendrada por la recta r al girar alrededor de la recta s

$$r \equiv \frac{x_1-1}{2} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3+2}{-1}, \qquad s \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Ecuación de los paralelos,

$$C(\lambda, \mu) \equiv \begin{cases} (x_1-1)^2 + x_2^2 + (x_2+2)^2 = \lambda \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = \mu \end{cases}$$

Eliminando λ y μ entre las ecuaciones de s y de $C(\lambda, \mu)$, obtenemos

$$F(\lambda, \mu) = \mu^2 + 4\mu - 12\lambda + 60 = 0,$$

y sustituyendo los valores de λ y μ, obtenemos

$$-8x_1^2 - 3x_2^2 - 11x_3^2 + 12x_1x_2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + 32x_1 + 12x_2 - 52x_3 = 0,$$

que es la ecuación pedida.

Si el eje de revolución es el Ox_3 y la curva que al girar da lugar a la superficie viene dada en la forma paramétrica $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $x_3 = x_3(t)$, llamando (X_1, X_2, X_3) a las coordenadas de un punto cualquiera de la superficie, la distancia de este punto al eje de giro es la misma que la distancia a este eje del punto de la curva $(x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0))$ que al girar engendra dicho punto de la superficie. Además los dos puntos tendrán la misma cota, luego

$$\begin{aligned} X_1^2 + X_2^2 &= x_1(t_0)^2 + x_2(t_0)^2 \\ X_3 &= x_3(t_0), \end{aligned}$$

eliminando entre ambas ecuaciones el parámetro t_0, obtenemos la ecuación de la superficie.

EJEMPLO 2. La ecuación de la superficie engendrada por la circunferencia

$$C \equiv \begin{cases} (x_2-4)^2 + x_3^2 - 1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

al girar alrededor del eje Ox_3 se obtiene poniendo C en forma paramétrica

$$C \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = \pm\sqrt{1-(t-4)^2} \end{cases}$$

y eliminando t entre las relaciones

$$X_1^2+X_2^2=t^2$$
$$X_3=\pm\sqrt{1-(t-4)^2}$$

con lo que

$$X_1^2+X_2^2+(X_3-4)^2-1=0$$

es la ecuación pedida.

SUPERFICIES DE TRASLACIÓN.

Dadas las curvas $\mathbf{x}(u)$ y $\mathbf{x}(v)$ que se cortan en el punto

$$\mathbf{x}(u_0)=\mathbf{x}(v_0),$$

se llama *superficie de traslación* de *generatriz* $\mathbf{x}(v)$ y *directriz* $\mathbf{x}(u)$ a la superficie engendrada por la curva $\mathbf{x}(v)$ al trasladarse paralelamente a sí misma, cuando el punto de contacto recorre la curva $\mathbf{x}(u)$.

Sea X un punto cualquiera de una posición cualquiera de la generatriz, es decir, el punto genérico de la superficie de traslación, tenemos que

$$\{\overrightarrow{OX}\}=\{\overrightarrow{OQ}\}+\{\overrightarrow{QX}\}=\{\overrightarrow{OQ}\}+\{\overrightarrow{PY}\}=\{\overrightarrow{OQ}\}+\{\overrightarrow{OY}\}-\{\overrightarrow{OP}\}$$

luego la ecuación vectorial de la superficie de traslación es

$$\mathbf{x}(u,\ v)=\mathbf{x}(u)+\mathbf{x}(v)-\mathbf{x}(u_0)$$

y sus ecuaciones paramétricas

$$x_1(u,\ v)=x_1(u)+x_1(v)-x_1(u)$$
$$x_2(u,\ v)=x_2(u)+x_2(v)-x_2(u)$$
$$x_3(u,\ v)=x_3(u)+x_3(v)-x_3(u).$$

EJEMPLO 3. Ecuaciones paramétricas de la superficie de traslación engendrada por la curva

$$C\equiv\begin{cases}x_1-4x_2^2=0\\ x_3=0\end{cases}$$

al moverse paralelamente a sí misma deslizándose sobre la recta

$$r\equiv\begin{cases}x_1-4x_3=0\\ x_2-5x_3=0\end{cases}$$

Ponemos en forma paramétrica ambas curvas:

$$C\equiv\begin{cases}x_1=4v^2\\x_2=v\\x_3=0\end{cases}\qquad r\equiv\begin{cases}x_1=4u\\x_2=5u\\x_3=u\end{cases},$$

luego

$$\begin{aligned}x_1(u,\ v)&=4u-4v^2\\x_2(u,\ v)&=5u-v\\x_3(u,\ v)&=u\end{aligned}$$

son las ecuaciones paramétricas pedidas. Eliminando entre ellas los parámetros u y v, obtenemos la ecuación cartesiana de la superficie

$$x_1=4x_3-4(5x_3-x_2)^2.$$

EJERCICIOS

1. Hállese el cono de revolución de vértice en el punto $(2, -3, 4)$, eje paralelo al vector $\mathbf{v}=(2, 1, -2)$ y semiángulo en el vértice 30°.

2. Hállese la ecuación de la superficie de rotación engendrada por la curva

$$\begin{cases}x_1x_2=1\\x_3=0\end{cases}$$

al girar alrededor de la recta

$$\begin{cases}x_1=x_2\\x_3=0\end{cases}$$

3. Hállese la ecuación de la superficie de traslación engendrada por la curva de ecuaciones paramétricas $x_1=t^2$, $x_2=2t+1$, $x_3=3t$, al moverse paralelamente a sí misma, apoyándose en la recta

$$r\equiv\begin{cases}2x_1-x_2+4x_3+3=0\\x_1+x_2+5x_3-1=0\end{cases}.$$

Soluciones a los ejercicios

CAPITULO 13

Párrafo 13.1.

1. $\{\overrightarrow{OA}\}=3u_1+u_2, \quad \{\overrightarrow{AB}\}=-7u_1+u_2 \quad$ y $\quad \{\overrightarrow{AC}\}=-3u_2$

$$(1,\ x_1,\ x_2)=(1,\ \bar{x}_1,\ \bar{x}_2)\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & -7 & 1\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

2. $$\begin{pmatrix}1 & 1 & 9\\ 1 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}A \Longrightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

luego $$(1,\ x_1,\ x_2)=(1,\ \bar{x}_1,\ \bar{x}_2)\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad 0=\left(\frac{7}{6},\ -\frac{5}{6}\right).$$

3. $(1,\ 3,\ 6)=(1,\ -1,\ 1)\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$, luego $a=2,\ b=5.$

4. $$3(a_{01}+a_{11}\bar{x}_1+a_{21}\bar{x}_2)-2(a_{02}+a_{12}\bar{x}_1+a_{22}\bar{x}_2)+3=-11\bar{x}_1-2\bar{x}_2+5.$$

$$(a_{01}+a_{11}\bar{x}_1+a_{21}\bar{x}_2)+4(a_{02}+a_{12}\bar{x}_1+a_{22}\bar{x}_2)-1=\bar{x}_1+18\bar{x}_2+9.$$

Identificando coeficientes y resolviendo las ecuaciones que resultan

$$(1,\ x_1,\ x_2)=(1,\ \bar{x}_1,\ \bar{x}_2)\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & -3 & 1\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

coordenadas de $C\cap C'$ respecto al segundo sistema (0, 0), y respecto al primero (2, 2).

Párrafo 13.2.

1. $$(x_1,\ x_2)=(8,\ 10)+\lambda(-16,\ -20).$$

2. $$r\equiv\begin{cases}x_1=\ 3+4\lambda\\ x_2=-5-7\lambda\end{cases}$$

3.
$$r \equiv (x_1, x_2) = (5, 7) + \mu(-7, -4)$$
$$s \equiv (x_1, x_2) = (2, 1) + \lambda(4, -1)$$

$$-\frac{7}{4} \neq \frac{-4}{-1},$$

luego se cortan.

4. Un vector de la variedad $L \equiv 2x_1 - 3x_2 = 0$ es el (3, 2), luego

$$r \equiv (x_1, x_2) = (2, 5) + \lambda(3, 2).$$

Como $\frac{3}{-6} = \frac{2}{-4}$, r y s tiene la misma dirección, y como $P \notin s$, son paralelas.

5.
$$t \equiv (x_1, x_2) = (2, -2) + \nu(4, 0).$$

Los vectores (4, 1), (3, 5) y (4, 0) son independientes dos a dos, luego las rectas son secantes dos a dos. No se cortan en el mismo punto, pues el sistema

$$\begin{aligned} 4\lambda - 3\mu &= -2 \\ \lambda - 5\mu &= 0 \\ 3\mu - 4\nu &= 2 \\ 5\mu &= -2 \end{aligned}$$

es incompatible.

Párrafo 13.3.

1. El haz de rectas determinado por s y t es

$$\lambda(x_1 + 2x_2) + \mu(x_1 - x_2 - 2) = 0.$$

Si la recta r pertenece al haz debe verificarse

$$\frac{\lambda + \mu}{2} = \frac{2\lambda + \mu}{1} = \frac{-2\nu}{-2}$$

para valores de λ y μ; o sea, debe ser compatible el sistema

$$\begin{aligned} 3\lambda - 3\mu &= 0 \\ \lambda - \mu &= 0 \end{aligned}$$

En efecto, lo es, pues:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

luego la recta pertenece al haz, y sus coordenadas homogéneas respecto a la base formada por las rectas s y t son: (1, 1).

2. Las rectas se cortan dos a dos formando un triángulo.

3. 1.º) La ecuación del haz de vértice $r \cap s$ es:

$$\lambda(x_1 - 2x_2 + 4) + \mu(x_1 + x_2 - 1) = 0,$$

y la del haz de vértice $P\ (2,\ -3)$ es:

$$\lambda(x_1-2)+\mu(x_2+3)=0.$$

2.º) $7x_1+4x_2-2=0.$

3.º) $x_1+x_2-1=0.$

4.º) En forma continua

$$\frac{x_1-2}{4}=\frac{x_2+3}{-2}$$

y en forma general:

$$x_1+2x_2+4=0.$$

4.

$A\ (1,\ 0),\quad A'\ (a,\ 0),\quad B\ (\alpha,\ \beta),\quad B'\ (k\alpha,\ k\beta),\quad C\ (0,\ 1),\quad C\ (c,\ 0)$

$$\left.\begin{aligned} AB &\equiv \beta-\beta x_1+(\alpha-1)x_2=0\\ A'B' &\equiv ak\beta-k\beta x_1+(k\alpha-a)x_2=0\end{aligned}\right\} AB\cap A'B'=\left(\frac{k(a\alpha-a-\alpha)+\alpha}{a-k},\ \frac{k\beta(a-1)}{a-k}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} BC &\equiv \alpha+(\beta-1)x_1-\alpha x_2=0\\ B'C' &\equiv k\alpha c+(k\beta-c)x_1-k\alpha x_2=0\end{aligned}\right\} BC\cap B'C'=\left(\frac{k\alpha(1-c)}{k-c},\ \frac{k(c+\beta-\beta c)-c}{k-c}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} AC &\equiv 1-x_1-x_2=0\\ A'C' &\equiv ac-cx_1-ax_2=0\end{aligned}\right\} AC\cap A'C'=\left(\frac{a(1-c)}{a-c},\ \frac{(a-1)c}{a-c}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{k(a\alpha-a-\alpha)+a}{a-k} & \dfrac{k\beta(a-1)}{a-k}\\ 1 & \dfrac{k\alpha(1-c)}{k-c} & \dfrac{k(c+\beta-\beta c)-c}{k-c}\\ 1 & \dfrac{a(1-c)}{a-c} & \dfrac{(a-1)c}{a-c}\end{vmatrix}=0.$$

5. $0=r\cap s=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\quad A=r\cap t=(-3,\ -2),\quad B=s\cap t=(0,\ 0),$

$$\{\overrightarrow{OA}\}=-\frac{5}{2}\mathbf{u}_1-\frac{5}{2}\mathbf{u}_2\qquad \{\overrightarrow{OB}\}=\frac{1}{2}\mathbf{u}_1-\frac{1}{2}\mathbf{u}_2$$

$$(1\quad x_1\quad x_2)=(1\quad \bar{x}_1\quad \bar{x}_2)\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

6. Las coordenadas del cuarto vértice $(x_1,\ x_2)$ son:

$$(x_1,\ x_2)=(2,\ -1)+[(-1-4),\ (4-1)]=(-3,\ 2),$$

y las de la intersección de sus diagonales son

$$\left(\frac{2-1}{2},\ \frac{4-1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right).$$

7. El problema equivale a hallar las coordenadas del punto

$$((3+2\lambda),\ (1-3\lambda))$$

en el nuevo sistema de referencia:

$$(1 \quad 3+2\lambda \quad 1-3\lambda)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1 \quad 12+3\lambda \quad 38+10\lambda),$$

luego la recta tiene ahora por ecuación

$$\mathbf{x} = (12,\ 38) + \lambda(3,\ 10).$$

8. En forma matricial se puede poner:

$$(1 \quad y_1 \quad y_2) = (1 \quad x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 1 & a_{01} & a_{02} \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Veamos pues:

1.º Si es: $$(1 \quad z_1 \quad z_2) = (1 \quad y_1 \quad y_2)\begin{pmatrix} 0 & a'_{21} & a'_{22} \\ 1 & a'_{01} & a'_{02} \\ 0 & a'_{11} & a'_{12} \end{pmatrix}$$

es: $$(1 \quad z_1 \quad z_2) = (1 \quad x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 1 & a_{01} & a_{02} \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a'_{01} & a'_{02} \\ 0 & a'_{11} & a'_{12} \\ 0 & a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= (1 \quad x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 1 & a''_{01} & a''_{02} \\ 0 & a''_{11} & a''_{12} \\ 0 & a''_{21} & a''_{22} \end{pmatrix},$$

luego el resultado de componer dos aplicaciones afines es otra aplicación afín.

2.º Que una aplicación afín sea biyectiva equivale a que la matriz de la transformación sea regular. El que las aplicaciones afines biyectivas formen grupo es consecuencia de que las matrices regulares formen grupo multiplicativo.

9. 1.º $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} A \Longrightarrow A =$$

$$= \frac{-1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -8 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{8}\begin{pmatrix} -8 & 12 & -36 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -16 & 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y_1 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}x_1 + 2x_2 \\ y_2 = \dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2}x_1 - x_2. \end{cases}$$

2.º **Puntos invariantes: haciendo**

$$\left.\begin{array}{l} y_1=x_1,\quad y_2=x_2 \Longrightarrow \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{3}{2}x_1-2x_2=-\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2}x_1+2x_2=\dfrac{9}{2} \end{array} \Longrightarrow x_1=\frac{3}{2},\quad x_2=\frac{15}{8}$$

3.º
$$\begin{array}{l} x_1=5-\dfrac{2}{3}y_1-\dfrac{4}{3}y_2 \\ x_2=2+\dfrac{1}{3}y_1-\dfrac{1}{3}y_2 \end{array} \Longrightarrow 5y_1+7y_2-33=0.$$

4.º Si $u_o+u_1x_1+u_2x_2=0$ es invariante $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \frac{u_o+5u_1+2u_2}{u_o}=\frac{-\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}u_2}{u_1}=\frac{-\frac{4}{3}u_1-\frac{1}{3}u_2}{u_2}=\lambda \Longrightarrow$$

$$\begin{array}{rrrr} (1-\lambda)u_o+ & 5u_1+ & 2u_2=0 \\ \left(-\dfrac{2}{3}-\lambda\right)u_1+ & \dfrac{1}{3}u_2=0 \\ -\dfrac{4}{3}u_1+ & \left(-\dfrac{1}{3}-\lambda\right)u_2=0 \end{array}$$

luego las raíces de

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 & 2 \\ 0 & -\dfrac{2}{3}-\lambda & \dfrac{1}{3} \\ 0 & -\dfrac{4}{3} & -\dfrac{1}{3}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

llevadas al sistema anterior nos darían las rectas invariantes.

10. $$P_r=\left(\frac{19}{7},\frac{8}{7}\right);\qquad P_s=\left(\frac{19}{6},\frac{15}{6}\right).$$

El punto $Q\ (1,-4)$ está alineado con ellas, pues

$$\begin{vmatrix} \dfrac{19}{6}-1 & \dfrac{15}{6}+4 \\ \dfrac{19}{7}-1 & \dfrac{8}{7}+4 \end{vmatrix}=0.$$

CAPITULO 14

Párrafo 14.1.

1.

$$x_1 = \bar{x}_2$$

$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\bar{x}_1 - \frac{2}{3}\bar{x}_2 + \frac{2}{3}\bar{x}_3$$

$$x_3 = 2\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 - \bar{x}_3$$

2.

$$y_1 = -3 + 2x_1 + 3x_2 + 3x_3$$

$$y_2 = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3$$

$$y_3 = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}x_1 + \frac{12}{5}x_2 + \frac{8}{5}x_3$$

$$\{\overrightarrow{OO}\} = -\{\overrightarrow{\bar{O}\bar{O}}\} = 3\bar{u}_1 + \frac{2}{5}\bar{u}_2 + \frac{3}{5}\bar{u}_3.$$

Párrafo 14.2.

1. $(x_1, x_2, x_3) = (3, -1, 2) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(0, 1, 2).$

2.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + 3\lambda - 2\mu \\ x_2 &= 1 + \mu \\ x_3 &= -2 + 4\lambda - \mu. \end{aligned}$$

Párrafo 14.3.

1.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - \lambda \\ x_2 &= 2 + 2\lambda \\ x_3 &= -1 + 3\lambda. \end{aligned}$$

2. La recta determinada por Q (2, 5, 7) y R (0, 19, 19) es

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 2\lambda \\ x_2 &= 5 + 14\lambda \\ x_3 &= 7 + 12\lambda \end{aligned}$$

y sustituyendo (x_1, x_2, x_3) por $(3, -2, 1)$ se tiene

$$\begin{aligned} 1 &= -2\lambda \\ -7 &= 14\lambda \\ -6 &= 12\lambda \end{aligned}$$

sistema que es evidentemente compatible $\Longrightarrow$ el punto P (3, −2, 1) pertenece a la recta determinada por los Q y R.

Párrafo 14.4.

1. La variedad de dirección de la recta sería la intersección de las variedades de dirección de ambos planos. Un vector de dicha variedad es el $(-3, 1, -2)$, luego

$$r \equiv \begin{cases} x_1 = 3 - 3\lambda \\ x_2 = -1 + \lambda \\ x_3 = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

2. Si en $x=(2, 1, 1)+\lambda(2, 0, 1)$ damos a λ los valores 0 y 1 obtenemos los dos puntos $(2, 1, 1)$ y $(4, 1, 2)$ que junto con el P $(2, 0, 2)$ nos determina el plano:

$$(x_1, x_2, x_3)=(2, 0, 2)+\lambda(2, 1, 0)+\mu(0, 1, -1).$$

3.
$$\begin{aligned} x_1 &= 1+3\lambda+4\mu \\ x_2 &= 1+3\lambda+3\mu \\ x_3 &= -1+\lambda-\mu. \end{aligned}$$

4. Un vector de dirección de la recta determinada por los puntos P y Q sería:

$$(3-0, 1-1, 1-0)=(3, 0, 1),$$

luego la ecuación del plano pedida será:

$$(x_1, x_2, x_3)=(0, 1, 0)+\lambda(3, 0, -3)+\mu(3, 0, 1).$$

5. Hallemos primero un vector de dirección de la recta pedida (como en el Ej. 1),

$$\lambda(1, 0, 1)+\mu(0, 1, 0)=\lambda_2(0, 2, 1)+\mu_2(1, 0, 0),$$

es decir:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= 2\lambda_2 \\ \mu_2 &= \lambda_2 \end{aligned}\right\}$$

luego:

$$\lambda_2=1 \Longrightarrow \mu_1=2 \quad \text{y} \quad \mu_2=1 \Longrightarrow \lambda_1=1,$$

con lo que el vector de dirección que nos interesa es el

$$1\cdot(1, 0, 1)+2\cdot(0, 1, 0)=(1, 2, 1).$$

Un punto de la recta a determinar situado sobre la r será el

$$(2+3\lambda_1, 1, -1+\lambda_1)$$

y la recta pedida (a falta de determinar λ_1) será:

$$(x_1, x_2, x_3)=(2+3\lambda_1, 1, -1+\lambda_1)+\mu(1, 2, 1).$$

Como esta recta se apoya en la s, se debe verificar que:

$$(2+3\lambda_1, 1, -1+\lambda_1)+\mu_1(1, 2, 1)=(4, 1, -1)+\lambda_2(2, 2, 1),$$

es decir:

$$\begin{aligned} \mu_1-2\lambda_2 &= 2 \\ \mu_1-\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} \lambda_2 &= -2 \\ \mu_1 &= -2 \\ \lambda_1 &= 0 \end{aligned}$$

luego la recta pedida será la

$$(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, -1) + \mu(1, 2, 1).$$

6. Las variedades de dirección de los planos son

$$\begin{aligned} L_{\pi_1} &\equiv x_1 - x_2 = 0 \\ L_{\pi_2} &\equiv x_3 = 0 \\ L_{\pi_3} &\equiv -x_1 + 4x_3 = 0 \end{aligned}$$

Se tiene $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{0\}$, pues

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

luego los planos se cortan en un punto.

7. $\sigma \equiv \mathbf{x} = (3, 2, 1) + \lambda(2, 1, -1) + \mu(1, 0, 2)$

$\sigma \cap r = (-18, -5, -4)$, $\sigma \cap s = (-7, -1, -4)$

luego la recta es

$$\mathbf{x} = (-18, -5, -4) + \lambda(-11, -4, 0).$$

8. $r \equiv \mathbf{x} = (2, 4, 6) + \lambda(3, 5, 5)$

$s \equiv \mathbf{x} = (4, 1, 0) + \mu(1, 1, 1)$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$ Se cruzan.

9. El plano π será el

$$(x_1, x_2, x_3) = \lambda(2, 1, -1) + \mu(3, 0, 1)$$

y la recta t será la

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1) + \lambda(1, -1, 2).$$

Así tenemos:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2, \qquad \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

la recta es paralela al plano.

10. $r \equiv \mathbf{x} = (0, -1, 2) + \lambda(1, 0, -1).$

$$r \cap \pi = (1, -1, 1), \quad r \cap \sigma = \left(\frac{1}{3}, -1, \frac{5}{3}\right)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = \lambda(1, -1, 1) + \lambda\left(\frac{1}{3}, -1, \frac{5}{3}\right).$$

Párrafo 14.5.

1. $$\lambda(2x_1+x_2+1)+\mu(2x_2-x_3-1)+\nu(2x_1+x_3)=0$$

$$4\lambda-3\mu+4\nu=0 \qquad \frac{\lambda}{7}=\frac{\mu}{-4}=\frac{\nu}{-10}$$

$$2\lambda-4\mu+3\nu=0$$

$$-6x_1-x_2-6x_3=0.$$

2. Los planos se cortan en rectas, dos a dos, siendo cada plano paralelo a la intersección de los otros dos.

3. Los planos π_1, π_2 y π_3 son las caras laterales de una superficie prismática triangular y π_4 es paralelo a π_3.

4. $\operatorname{rg} A=3$, $\operatorname{rg} B=4$ y todos los menores de tercer orden formados con elementos de A, han de ser distintos de cero.

Párrafo 14.6.

1. $5x_1+11x_2+2x_3-18=0$.

2. La recta está contenida en el plano.

3. $r\cap s=(4,\ 1,\ -6)$.

$$(x_1,\ x_2,\ x_3)=(4,\ 1,\ -6)+\lambda(2,\ 2,\ -4)+\mu(1,\ 0,\ -2).$$

4. La recta es paralela al plano.

5. $\alpha=-3$, $\beta=3$.

6. $3x_1+2x_2-5x_3+4=0$.

7. Se cruzan.

8. $47x_1-19x_2-15x_3+51=0$.

9. $$\frac{x_1+5}{2} \quad \frac{x_2-\frac{13}{3}}{-1} \quad \frac{x_3-\frac{5}{3}}{3}$$

o bien:

$$\begin{cases} 5x_1+7x_2-x_3-7=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+4=0 \end{cases}$$

10. $$\frac{x_1+\frac{1}{10}}{2}=\frac{x_2+\frac{7}{10}}{-3}=\frac{x_3+\frac{9}{2}}{4}$$

CAPITULO 15

Párrafo 15.1.

1. Sean $P, Q, P', Q' \notin A$, tales que $\varphi(P,\ Q)=\varphi(P',\ Q')$. Podemos expresar $\varphi(P,\ Q')$ de dos maneras distintas:

$$\varphi(P,\ Q')=\varphi(P,\ Q)+\varphi(Q,\ Q') \quad \text{y} \quad \varphi(P,\ Q')=\varphi(P,\ P')+\varphi(P',\ Q').$$

De ambas y de la hipótesis $\Longrightarrow \varphi(Q, Q')=\varphi(P, P')$.

Recíprocamente, si $\varphi(Q, Q')=\varphi(P, P')$ de las relaciones anteriores $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \varphi(P, Q)=\varphi(P', Q').$$

2. Podemos considerar el espacio vectorial V como espacio afín asociado a sí mismo, de la siguiente manera:

$$\sigma: V \longrightarrow V$$
$$(x, y) \longrightarrow y-x.$$

a) Sean x e y dos elementos de V, x considerado como un punto e y como un vector. Pongamos $z=x+y$. Entonces, por definición:

$$\sigma(x, z)=z-x=(x+y)-x=y,$$

luego se verifica A_1.

b) Si $\sigma(x, y)=0 \Longrightarrow x-y=0 \Longrightarrow x=y,$

Se verifica A_2.

c) $\sigma(x, z)+\sigma(z, y)=(z-x)+(y-z)=y-x=\sigma(x, y).$

Se verifica A_3.

Sea A un espacio afín asociado a V. Tomemos un punto fijo $O \in A$. La aplicación ρ: $A \longrightarrow V$ tal que $\rho(P)=\varphi(O, P)$ es biunívoca. Además

$$\sigma(\rho(P), \rho(Q))=\sigma(\varphi(O, P), \varphi(O, Q))=\varphi(O, Q)-\varphi(O, P)=\varphi(P, Q).$$

Luego todo espacio afín A asociado al espacio vectorial V es isomorfo al espacio afín particular V y, por tanto, dos espacios afines asociados a V son isomorfos entre sí. Hay tantos isomorfismos como puntos en A.

Párrafo 15.2.

1. Si

$$P \in L_A \cap L_A' \Longrightarrow \begin{cases} \varphi(O, P) \in L \\ \varphi(O, P) \in L' \end{cases} \Longrightarrow \varphi(O, P) \in L \cap L'.$$

Si

$$x \in L \cap L' \quad \text{y} \quad P \in A \mid \varphi(O, P)=x,$$

puesto que

$$x \in L \Longrightarrow P \in L_A,$$

análogamente $\Longrightarrow P \in L_A'$, luego

$$P \in L_A \cap L_A'.$$

En resumen, $\varphi(O, P)$ describe $L \cap L'$ cuando P describe $L_A \cap L_A'$.

2. Si una recta contiene a P y Q, entonces su variedad lineal de dirección L tiene que contener al vector $\varphi(P, Q)$, el cual es distinto de cero, puesto que $P \neq Q$. L es una variedad lineal de dimensión 1, una de cuyas bases es el vector $\varphi(P, Q)$. La recta contiene a P y tiene por variedad de dirección L, luego es única.

Consideremos, por otra parte, el subespacio vectorial unidimensional L una de cuyas bases sea $\varphi(P, Q)$. Construyamos la recta de dirección L que contenga a P. Esta recta contendrá a Q, puesto que $\varphi(P, Q) \in L$.

3. La demostración es análoga a la del ejercicio anterior.

Párrafo 15.3.

1. $$-2x_1+4x_2-2x_4-2=0.$$

2. $$L_A \cap L_A' \equiv \begin{cases} x_1-2x_2+x_3 \quad -x_5=2 \\ x_1 \quad -x_3+4x_4 \quad =1 \\ x_1 \quad =1 \\ x_2 \quad -x_4 \quad =0 \\ 2x_2+x_3 \quad =1 \\ x_3 \quad -x_5=0 \end{cases} \text{rg } A=5, \quad \text{rg } B=6, \quad L_A \cap L_A'=\phi.$$

3. $L=\{(3, 0, 1, 0), (2, 0, 2, 2)\}$, $L'=(2, 0, 2, -5)$

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}=3 \Longrightarrow L' \not\subset L \Longrightarrow \text{no son paralelas.}$$

4. $$L=\left\{(3, 1, 0, -3), \quad \left(\frac{12}{5}, \frac{-1}{5}, 0, 0\right)\right\}.$$

Párrafo 15.4.

1.

$$AB \equiv 3x_1+4x_2-26=0, \quad BC \equiv 3x_1-2x_2-14=0, \quad CD \equiv 3x_1+x_2-29=0,$$
$$DE \equiv x-8=0, \quad EA \equiv 3x_1-x_2-1=0.$$

2. Sí. 3. Sí. 4. No.

CAPITULO 16

Párrafo 16.1.

1. *a)* $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=3\mathbf{u}_1^2-\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2-2\mathbf{u}_2^2=-43$;

b) $|\mathbf{x}|=\sqrt{\mathbf{u}_1^2-2\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_2^2}=\sqrt{19}$,

$|\mathbf{y}|=\sqrt{9\mathbf{u}_1+12\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2+4\mathbf{u}_3}=\sqrt{196}$;

c) $$\mathbf{x}, \mathbf{y}=\arccos\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}=\frac{-43}{\sqrt{10\cdot 196}}.$$

2. $$L=\{y \in V \mid \mathbf{y}\cdot\mathbf{x}=0\}.$$

Si $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in L$,

$\Longrightarrow (\mathbf{y}+\mathbf{z})\cdot\mathbf{x}=\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}+\mathbf{z}\cdot\mathbf{x}=0 \Longrightarrow \mathbf{y}+\mathbf{z} \in L$; $\lambda\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}=\lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})=\lambda 0=0 \Longrightarrow \lambda\mathbf{x} \in L$.

Si $\mathbf{x}=x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2$, la ecuación de L es

$$(x_1\mathbf{u}_1^2+x_2\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2)y_1+(x_1\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2+x_2\mathbf{u}_2^2)y_2=0,$$

luego $d(L)=1$.

3. *a)* $(3,\ 2)$; *b)* $\begin{cases} x_1=3\lambda \\ x_2=2\lambda \end{cases}$; *c)* $2x_1-3x_2=0$.

4. Sea AOB el diámetro y C un punto de la semicircunferencia:

$$\{\overrightarrow{CA}\}\cdot\{\overrightarrow{CB}\}=[\{\overrightarrow{CO}\}+\{\overrightarrow{OA}\}]\cdot[\{\overrightarrow{CO}\}+\{\overrightarrow{OB}\}]=r^2-r^2-r^2+r^2=0.$$

5. $\{\overrightarrow{AB}\}+\{\overrightarrow{BC}\}=\{\overrightarrow{AC}\} \Longrightarrow \{\overrightarrow{AC}\}^2=\{\overrightarrow{AB}\}^2+\{\overrightarrow{BC}\}^2+2\{\overrightarrow{AB}\}\cdot\{\overrightarrow{BC}\} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow b^2=c^2+a^2+2ab\cos(180^\circ-B)=c^2+a^2-2ab\cos B.$

6. $\{\overrightarrow{AC}\}=\{\overrightarrow{AB}\}+\{\overrightarrow{BC}\}, \quad \{\overrightarrow{BD}\}=\{\overrightarrow{BC}\}+\{\overrightarrow{CD}\}=\{\overrightarrow{BC}\}-\{\overrightarrow{AB}\} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \{\overrightarrow{AC}\}\cdot\{\overrightarrow{BD}\}=\{\overrightarrow{BC}\}^2-\{\overrightarrow{AB}\}^2=|\{\overrightarrow{BC}\}|^2-|\{\overrightarrow{AC}\}|^2=0.$

7. $\mathbf{x}=\mathbf{z}+\lambda\mathbf{y} \mid \mathbf{z}\perp\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\lambda|\mathbf{y}|^2 \Longrightarrow \lambda=\dfrac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^2}, \quad \mathbf{z}=\mathbf{x}-\dfrac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^2}\,\mathbf{y}.$

Párrafo 16.2.

1. $\mathbf{u}_1^2=9, \quad \mathbf{u}_2^2=25, \quad \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2=\dfrac{15\sqrt{2}}{2}; \quad \mathbf{v}_1=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\,\mathbf{u}_1+\dfrac{\sqrt{3}-1}{5}\,\mathbf{u}_2,$

$\mathbf{v}_2=\dfrac{4}{5}\,\mathbf{u}_2 \Longrightarrow |\mathbf{v}_1|=\sqrt{\mathbf{v}_1^2}=2, \quad |\mathbf{v}_2|=\sqrt{\mathbf{v}_2^2}=4, \quad \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2=4\sqrt{3} \Longrightarrow \widehat{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2}=$
$=\arccos\dfrac{4\sqrt{3}}{2\cdot4}=30^\circ; \quad \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{v}_2=6\sqrt{2} \Longrightarrow \widehat{\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_2}=\arccos\dfrac{6\sqrt{2}}{4}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

2. $$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 9 & \dfrac{15\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{15\sqrt{2}}{2} & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=(x_1' \quad x_2')\begin{pmatrix} 4 & 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}.$$

Párrafo 16.3.

1. $AB\equiv 3x_1-2x_2-5=0, \quad BC\equiv x_1-3x_2-4=0, \quad CA\equiv 2x_1+x_2-8=0.$

Las bisectrices son

$$\frac{3x_1-2x_2-5}{\sqrt{13}}=\pm\frac{x_1-3x_2-4}{\sqrt{5}}, \quad \frac{x_1-3x_2-4}{\sqrt{5}}=\frac{2x_1+x_2-8}{\pm\sqrt{5}}$$

y

$$\frac{2x_1+x_2-8}{\sqrt{5}}=\frac{3x_1-2x_2-5}{\pm\sqrt{13}}.$$

2. Hay dos soluciones

$$A\left(\frac{102\mp3\sqrt{31}}{10}, \frac{71\pm6\sqrt{31}}{10}\right)$$

$$O_r\left(\frac{-4\cdot729\pm2\cdot091\sqrt{3}}{510\pm210\sqrt{3}}, \frac{-12\cdot351\pm1\cdot593\sqrt{3}}{510\pm210\sqrt{3}}\right).$$

3.
$$\begin{cases} 55x_1+33x_2-32=0 \\ 3x_1-5x_2+10=0. \end{cases}$$

4. $\cos\beta=\dfrac{a\,\operatorname{sen}\alpha}{\pm\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$, $\cos\gamma=\dfrac{b\,\operatorname{sen}\alpha}{\pm\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$;

$$\cos\beta=\frac{\pm 3}{\sqrt{72+30\sqrt{2}}}, \quad \cos\gamma=\frac{\mp 5}{\sqrt{72+30\sqrt{2}}}.$$

5.
$$d(P,\,r)=\frac{(ap_1+bp_2+c)\,\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}},$$

$$d(P,\,r)=\frac{23}{\sqrt{45-72\sqrt{3}}}.$$

6. $\operatorname{tg}(r,s)=\dfrac{(m'-m)\,\operatorname{sen}\alpha}{1+mm'+(m+m')\cos\alpha}$, $\widehat{r,s}=\operatorname{arc\,tg}=-\sqrt{3}=120^\circ$.

7. $A_{ABC}=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\operatorname{sen}\alpha$; $A_{ABC}=\dfrac{11\sqrt{3}}{4}$.

8. $r\equiv x_2+1=m(x_1+5)$; $AB\equiv 2x_1-x_2+4=0$; $AC\equiv x_1+x_2-4=0$;

$$r\cap AB=\left(\frac{5m-5}{2-m},\,\frac{6m-2}{2-m}\right); \quad r\cap AC=\left(\frac{5-5m}{m+1},\,\frac{9m-1}{m+1}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{5m-5}{2-m} & \dfrac{6m-2}{2-m} \\ 1 & \dfrac{5-5m}{m+1} & \dfrac{9m-1}{m+1} \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix}=45m-50m-1=0.$$

$$m=\frac{25\pm\sqrt{670}}{45}\Longrightarrow x_2+1=\frac{25\pm\sqrt{670}}{45}(x_1+5).$$

9. $4x_1-3x_2+3=0$, $x_2-1=0$.

10.

$B\ (5,\,1)$, $D\ (-2,\,0)$; $AB\equiv 4x_1-3x_2-17=0$, $BC\equiv 3x_1+4x_2-19=0$,
$CD\equiv 4x_1-3x_2+8=0$, $DA\equiv 3x_1+4x_2+6=0$.

11. $A\ (0,\,0)$, $B\ (\pm 4,\,0)$, $C\ (\pm 2,\,\pm 2\sqrt{3})$. Cuatro soluciones.

12.

$(3,\,3)$, $(-3,\,0)\in r\Longrightarrow \mathbf{v}_r=6\mathbf{u}_1+3\mathbf{u}_2$; $(0,\,1)$, $(-1,\,5)\in s\Longrightarrow \mathbf{v}_s=\mathbf{u}_1-4\mathbf{u}_2$

$$\widehat{r,s}=\operatorname{arc\,cos}\frac{\mathbf{v}_r\cdot\mathbf{v}_s}{|\mathbf{v}_r||\mathbf{v}_s|}=\frac{-276-105\sqrt{3}}{\sqrt{369+180\sqrt{3}}\,\sqrt{404-40\sqrt{3}}}$$

13. $(2,\ 0),\quad \left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right),\quad \left(\frac{21}{17},\ \frac{-16}{17}\right),\quad A=\frac{49}{34}.$

14.
$$\{\overrightarrow{AX}\} \perp \{\overrightarrow{BX}\},$$

luego en ejes rectangulares

$$(x_1-a_1)(x_1-b_1)+(x_2-a_2)(x_2-b_2)=0$$

y en ejes oblicuos

$$(x_1-a_1)(x_1-b_1)+\tfrac{1}{2}[(x_1-a_1)(x_2-b_2)+(x_2-a_2)(x_1-b_1)]+(x_2-a_2)(x_2-b_2)=0.$$

15. Primer haz:

$$\lambda_o(x_1-4)+\lambda_1(x_1+2)=0,$$

segundo:

$$\mu_o(2x_1+2x_2-3)+\mu_1(x_1-3x_2+1)=0.$$

Ecuación de la transformación:

$$2\lambda_o\mu_o+\lambda_o\mu_1+2\lambda_1\mu_o-3\lambda_1\mu_1=0.$$

La transformada de la recta $x_1-x_2-6=0$ es la $2x_1+2x_2-3=0$. El lugar se obtiene eliminando λ_o, λ_1, μ_o, μ_1 entre las ecuaciones de los haces y de la transformación:

$$8x_1^2+8x_2^2-39x_1+11x_2+18=0.$$

Párrafo 16.4.

1.

$$(1,\ x_1^*,\ x_2^*)=(1,\ x_1,\ x_2)\begin{pmatrix}1 & 5 & 13\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix},\quad X^*=X\begin{pmatrix}1 & 5 & -13\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 3 & -5\end{pmatrix},$$

$$X^*=X\begin{pmatrix}1 & -5 & 13\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 5\end{pmatrix},\quad X^*=X\begin{pmatrix}1 & -5 & -13\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & -3 & -5\end{pmatrix}.$$

CAPITULO 17

Párrafo 17.1.

1.
$$\alpha=\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=-6,\quad |\mathbf{u}|=\sqrt{14},\quad |\mathbf{v}|=3\sqrt{2},\quad \widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}}=\arccos\frac{-\sqrt{7}}{7},$

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}=-\sqrt{2},\quad \mathrm{pr}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}=\frac{-3\sqrt{14}}{7}.$$

3. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}=3\cdot 2+(-2)(-\lambda)+1\cdot 1=0\Rightarrow 7+2\lambda=0\Rightarrow\lambda=\frac{-7}{2}.$

4.

$$\mathbf{n} \in N \subset V_3 \quad \text{si} \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}=0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in L$$

$$(\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2)\cdot\mathbf{x}=\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{x}+\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{x}=0+0=0 \;\forall\; \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \in N \;\text{ y }\; \forall\, \mathbf{x} \in L \Longrightarrow \mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2 \in N;$$

$$\alpha\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}=\alpha(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x})=\alpha 0=0 \Longrightarrow \mathbf{n} \in N \quad \forall\, \mathbf{x} \in L \;\text{ y }\; \forall\, \alpha \in R \Longrightarrow \alpha\mathbf{n} \in N.$$

5. $$(5,\ 0,\ 3),\ (-4,\ 3,\ 0) \in L \Longrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 3x_3 = 0 \\ -4x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

es la variedad pedida.

6. $(3,\ 4,\ -1) \in L \Longrightarrow 3x_1+4x_2-x_3$ es la variedad pedida.

Párrafo 17.2.

1. $$|\mathbf{v}\times\mathbf{w}|=|\mathbf{v}||\mathbf{w}||\operatorname{sen}\widehat{\mathbf{v},\mathbf{w}}|, \qquad \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=|\mathbf{v}||\mathbf{w}|\cos\widehat{\mathbf{v},\mathbf{w}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |\mathbf{v}\times\mathbf{w}|^2+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})^2=\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\cdot\operatorname{sen}^2\widehat{\mathbf{v},\mathbf{w}}+\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|\cos^2\widehat{\mathbf{v},\mathbf{w}}=\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|.$$

2.

$$\{\overrightarrow{AB}\}+\{\overrightarrow{BC}\}+\{\overrightarrow{CA}\}=0 \Longrightarrow \{\overrightarrow{AB}\}\times\{\overrightarrow{BC}\}=\{\overrightarrow{BA}\}\times\{\overrightarrow{CA}\}=\{\overrightarrow{CA}\}\times\{\overrightarrow{AB}\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow ca \operatorname{sen} B = ab \operatorname{sen} C = bc \operatorname{sen} A \Longrightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

3. $$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0 \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{v}=0 \\ \text{o} \\ \mathbf{w}=0 \\ \text{o} \\ \cos\widehat{\mathbf{v},\mathbf{w}}=0 \end{cases}$$

Si

$$\cos\widehat{\mathbf{v},\mathbf{w}}=0 \Longrightarrow |\operatorname{sen}\widehat{\mathbf{v},\mathbf{w}}|=1 \Longrightarrow \mathbf{v}\times\mathbf{w}=0 \Longrightarrow |\mathbf{v}||\mathbf{w}|=0 \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{v}=0 \\ \text{o} \\ \mathbf{w}=0 \end{cases}$$

4. $$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{u}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{x})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})\mathbf{u}-\mathbf{u}^2\mathbf{x}=\mathbf{x}=-\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{\mathbf{u}^2}.$$

Párrafo 17.3.

1. $$[\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}]=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ \lambda & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow \lambda=\frac{5}{3}.$$

2. Es consecuencia de ser el producto mixto una forma trilineal alternada.

3. $[3\mathbf{u}+2\mathbf{v},\ \mathbf{u}-5\mathbf{w},\ 3\mathbf{v}+\mathbf{w}]=-45[\mathbf{u},\ \mathbf{w},\ \mathbf{v}]+2[\mathbf{v},\ \mathbf{u},\ \mathbf{w}]=43[\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}]$.

4. $V=32$.

Párrafo 17.4.

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u})=[\mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u})]\mathbf{w}-[\mathbf{w}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u})]\mathbf{v}=[\mathbf{v},\ \mathbf{w},\ \mathbf{u}]\mathbf{w} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow [\mathbf{u}\times\mathbf{v},\ \mathbf{v}\times\mathbf{w},\ \mathbf{w}\times\mathbf{u}]=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot[\mathbf{v},\ \mathbf{w},\ \mathbf{u}]\mathbf{w}=[\mathbf{w},\ \mathbf{u},\ \mathbf{v}][\mathbf{v},\ \mathbf{w},\ \mathbf{u}]=[\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}]^2.$$

2. $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=-(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\mathbf{u}=-[(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{w}-(\mathbf{w}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}]=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}.$

3. $(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=[(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{v}]\mathbf{u}-[(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{u}]\mathbf{v}=[\mathbf{v},\ \mathbf{x},\ \mathbf{y}]\mathbf{u}-[\mathbf{u},\ \mathbf{x},\ \mathbf{y}]\mathbf{v}$

4. $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}=0$ (ver Ej. 9), luego $[\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}]=0$.

5. $$0=(\mathbf{w}\times\mathbf{u})\times\mathbf{v}=(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}\Longrightarrow\begin{cases}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}=0, & \text{ó}\\ (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}=0, & \text{ó}\\ (\mathbf{w}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}\end{cases}$$

luego $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$. El recíproco es inmediato.

6. $$\mathbf{u}=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{x}-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{x}-c\mathbf{v}\Longrightarrow\mathbf{x}\frac{\mathbf{u}-c\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}.$$

7. *a)* $2\mathbf{u}_1+9\mathbf{u}_2+11\mathbf{u}_3$;
   b) 5;
   c) $(3\mathbf{v}-2\mathbf{w})\times(\mathbf{v}+4\mathbf{w})=14\mathbf{v}\times\mathbf{w}=14\mathbf{u}_1+42\mathbf{u}_2+14\mathbf{u}_3$;
   d) $\sqrt{851}$;
   e) -83;
   f) $29\mathbf{u}_1+87\mathbf{u}_2+116\mathbf{u}_3$.

8. $$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{u}_1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{u}_2\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{u}_3.$$

9. $$\left.\begin{aligned}\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})&=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}\\ \mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})&=(\mathbf{w}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}-(\mathbf{w}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}\\ \mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u})&=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{w}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}\end{aligned}\right\}$$

Sumando miembro a miembro se obtiene el resultado pedido.

Párrafo 17.5.

1. $x_1+3x_2+10=0,\quad 5x_2+x_3+19=0,\quad 5x_1-3x_3-7=0.$

2. 1.º $$\begin{cases}7x_1-9=0\\ 14x_2-21x_3+8=0\end{cases}$$ en este caso sólo de una.

   2.º $\mathbf{v}=(0,\ 3,\ 2).$

   3.º $\widehat{r,\mathbf{u}_1}=\frac{\pi}{2},\quad \widehat{r,\mathbf{u}_2}=\arccos\frac{3}{\sqrt{13}},\quad \widehat{r,\mathbf{u}_3}=\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}.$

3. *a)* $\frac{1}{4}\sqrt{65}$; *b)* $\frac{\sqrt{65}}{3}$; *c)* $\frac{3}{2}$; *d)* $\frac{9}{\sqrt{542}}$; *e)* $\frac{9}{\sqrt{362}}$.

4. $$(\mathbf{x}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{v}=0.$$

5. $$(\mathbf{x}-\mathbf{c})^2=r^2.$$

6. $$5x_1+3x_2-x_3\pm\sqrt{210}=0.$$

7. $$P\ (0,\ 1,\ 5);\quad d\ (P,\ \pi)=\frac{9}{\sqrt{5}}.$$

8. $$-15x_1+10x_2-6x_3+30=0.$$

9. Se cruzan.

10. $$\frac{x_1-2}{1}=\frac{x_2+1}{0}=\frac{x_3-2}{-2}.$$

11. $$\begin{cases}38x_1+79x_2+\quad x_3+315=0\\ 54x_1-90x_2+117x_3+\ 46=0.\end{cases}$$

12. $x_1-x_2+4=0$; $45°$, $45°$, 0.

13. Las coordenadas del punto pedido son soluciones del sistema

$$\frac{3x_1+2x_2-x_3+1}{\sqrt{14}}\quad\frac{x_1+4x_2-1}{\pm\sqrt{17}}$$

$$\frac{x_1}{2}=\frac{x_2+1}{3}=\frac{x_3-2}{-1}.$$

14. $$x_1+\lambda x_2-(2+\lambda)x_3-1+\lambda=0,$$

$$\frac{\lambda-1}{\sqrt{1+\lambda^2+(2+\lambda)^2}}=4\Longrightarrow 7\lambda^2+18\lambda+19=0\Longrightarrow 18^2-4\cdot7\cdot19<0$$

no existe plano que cumpla la condición. El problema es imposible.

15. $$\cos\alpha=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{16}{6\cdot21}}=\sqrt{\frac{20}{21}}.$$

16. $$x_2-\sqrt{3}x_3=0,\qquad d=\frac{1+\sqrt{3}}{3}.$$

17. $$r(\lambda,\ \mu)\equiv\begin{cases}x_1+\lambda x_2+\ x_3-1=0\\ x_1\qquad\ +\mu x_3\quad\ =0\end{cases}\qquad v_r=(\lambda\mu,\ 1-\mu,\ -\lambda)$$

$$r\|\pi\Longrightarrow\lambda\mu+2-2\mu+\lambda=0;\qquad r\|\sigma\Longrightarrow 2\lambda\mu+1-\mu-3\lambda=0\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\lambda=\begin{cases}\frac{4}{5}\\ 0\end{cases},\quad \mu=\begin{cases}\frac{7}{3}\\ 1\end{cases}\Longrightarrow r_1\equiv\begin{cases}5x_1+4x_2+5x_3-5=0\\ 3x_1\qquad\ +7x_3\quad\ =0\end{cases}$$

La otra solución no sirve, pues los planos $x_1+x_3-1=0$ y $x_1+x_3=0$ son paralelos.

Párrafo 17.6.

1. $$X=X^*\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & -1\\ 0 & \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{8} & \frac{2-3\sqrt{2}}{8} & \frac{\sqrt{6}}{4}\\ 0 & \frac{6-\sqrt{2}}{8} & \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{8} & -\frac{\sqrt{2}}{4}\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}.$$

CAPITULO 18

Párrafo 18.1.

1. $$f(x,\ y)=(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} \frac{287}{343} & \frac{35}{343} \\ \frac{35}{343} & \frac{21}{343} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Párrafo 18.2.

1. Sea $$L'=\{\mathbf{x}\in V \quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0 \quad \forall \quad \mathbf{y}\in L\}.$$

Si

$$\mathbf{x},\ \mathbf{z}\in L' \Longrightarrow \begin{cases}\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0\\ \mathbf{z}\cdot\mathbf{y}=0\end{cases} \forall \quad \mathbf{y}\in L \Longrightarrow (\mathbf{x}+\mathbf{z})\cdot\mathbf{y}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{z}\cdot\mathbf{y}=0 \quad \forall \quad \mathbf{y}\in L \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathbf{x}+\mathbf{z}\in L'; \qquad (\lambda\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=\lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})=0 \Longrightarrow \lambda\mathbf{x}\in L'.$$

2. Si $$\mathbf{v}=v_1\mathbf{u}_1+\ldots+v_n\mathbf{u}_n \Longrightarrow L'\equiv v_1x_1+\ldots+v_nx_n=0$$

es la ecuación de la variedad lineal ortogonal; $d(L')=n-1$.

3. Si $$\mathbf{x}\in V \Longrightarrow \mathbf{x}=\lambda\mathbf{v}+\mathbf{w} \quad \text{con} \quad \lambda=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{|\mathbf{v}|^2}$$

y $$\mathbf{w}=\mathbf{x}-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}\in L' \Longrightarrow L+L'=V.$$

Si

$$\mathbf{y}\in L\cap L' \Longrightarrow \mathbf{y}\cdot\mathbf{y}=0 \Longrightarrow \mathbf{y}=0 \Longrightarrow L\cap L'=\{0\}.$$

Párrafo 18.3.

1. $$IAI^{-1}=A, \quad |I|=1\neq 0 \Longrightarrow A\sim A;$$

si

$$BAB^{-1}=C \quad \text{con} \quad |B|\neq 0 \Longrightarrow A=B^{-1}CB \quad \text{con} \quad |B^{-1}|\neq 0,$$

luego si

$$A\sim C \Longrightarrow C\sim A;$$

si $$BAB^{-1}=C \quad \text{y} \quad DCD^{-1}=E \quad \text{con} \quad |B|\neq 0, \quad |D|\neq 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (DB)A(DB)^{-1}=E \quad \text{con} \quad |DB|\neq 0,$$

luego si

$$A\sim C \quad \text{y} \quad C\sim E \Longrightarrow A\sim E.$$

2. Utilícese el hecho de que si un sistema homogéneo es de rango $\mathbf{n-p}$, sus soluciones forman una variedad lineal de dimensión $n-(n-p)=p$.

3. Si

$$BAB^{-1}=C \quad \text{con} \quad |B|\neq 0 \Longrightarrow |C-\lambda I|=|BAB^{-1}-\lambda BIB^{-1}|=$$

$$=|B||A-\lambda I||B|^{-1}=|A-\lambda I|.$$

4. Basta considerar una matriz no diagonizable y la matriz diagonal que tenga por elementos los valores propios de la anterior (tomando cada uno tantas veces como indique su multiplicidad en la ecuación característica).

5. Si $BAB^{-1}=C \Longrightarrow |A-\lambda I|=|C-\lambda I|$ (Ej. 3)

pero

$$|A-\lambda I|=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\ldots$$

y

$$|C-\lambda I|=(-1)^n\lambda^n+(-1)(c_{11}+c_{22}+\ldots+c_{nn})\lambda^{-1}+\ldots \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ii}=\sum_{i=1}^{n} c_{ii}.$$

6. Si $BAB^{-1}=C \Longrightarrow |BAB^{-1}|=|C| \Longrightarrow |B||A||B|^{-1}=|C| \Longrightarrow |A|=|C|$.

7. $$|A-\lambda I|=\lambda\left(\lambda-\frac{13+\sqrt{129}}{2}\right)\left(\lambda-\frac{13-\sqrt{129}}{2}\right).$$

Para

$$\lambda=0 \Longrightarrow (-10,\ 1,\ 3);$$

para

$$\lambda=\frac{13\pm\sqrt{129}}{2} \Longrightarrow \left(\frac{75\mp 3\sqrt{129}}{2},\ \frac{-99\mp 9\sqrt{129}}{2},\ \frac{-129\mp 7\sqrt{129}}{2}\right).$$

Párrafo 18.4.

1. $$|A-\lambda I|=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+|A|, \quad \lambda^2-4\lambda-1;$$

$$|A-\lambda I|=-\lambda^3+(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2-$$

$$-\left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}\right)+\lambda+|A|; \quad -\lambda^3+7\lambda^2-15\lambda+9.$$

2. rg=3; signatura=1; $x_1^2+x_2^2-x_3^2$, no degenerada indefinida.

3. $\lambda_1=1$ doble, $\lambda_2=-1$. Para

$$\lambda_1=1 \Longrightarrow (\alpha,\ 1,\ -1).$$

Para

$$\lambda_2=-1 \Longrightarrow (0,\ 1,\ 1).$$

4. $$3x_1^2+3x_2^2+6x_3^2+2x_1x_2=3\left(x_1+\frac{1}{3}x_2\right)^2+\frac{8}{3}x_2^2+6x_3^2.$$

Haciendo

$$x_1^*=x_1+\frac{1}{3}x_2, \quad x_2^*=x_2 \quad \text{y} \quad x_3^*=x_3 \Longrightarrow f_c(\mathbf{x})=3x_1^{*2}+\frac{8}{3}x_2^{*2}+6x_3^{*2}.$$

Las fórmulas de cambio de base son:

$$X=X^*\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

luego

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{u}_1-\frac{1}{3}\mathbf{u}_2,\qquad \mathbf{v}_2=\mathbf{u}_2,\qquad \mathbf{v}_3=\mathbf{v}_3.$$

CAPITULO 19

Párrafo 19.2.

1. $8x_1^2-1=0.$

2. $(2+\sqrt{2})x_1+(2-\sqrt{2})x_2-4=0.$

3. $\sqrt{2}x_2+x_1^2=0.$

Párrafo 19.3.

1. *a)* parábola; *b)* dos rectas reales no paralelas; *c)* dos rectas paralelas distintas imaginarias conjugadas; *d)* hipérbola; *e)* circunferencia; *f)* elipse real; *g)* hipérbola; *h)* dos rectas imaginarias no paralelas; *i)* elipse imaginaria.

2. *a)* parábola, $4x_2+5\sqrt{5}\,x_1^2=0;$

   b) hipérbola,
   $$(\sqrt{58}-2)x_1^2-(\sqrt{58}+2)x_2^2-1=0;$$

   c) dos rectas reales no paralelas,
   $$(\sqrt{3}\,x_1+\sqrt{2}\,x_2)(\sqrt{3}\,x_1-\sqrt{2}\,x_2)=0;$$

   d) hipérbola equilátera,
   $$x_1^2-x_2^2-5=0;$$

   e) hipérbola,
   $$(4+\sqrt{29})x_1^2+(4-\sqrt{29})x_2^2+\frac{70}{13}=0.$$

3. $\lambda=-1$ y $\lambda=\frac{5}{3}.$

4. $\lambda=\frac{5}{3}$ y $\lambda=\frac{5}{4}$ dos rectas reales no paralelas; $\lambda=\pm 1$ parábolas; $|\lambda|>1$ y $\lambda\neq\frac{5}{3}$, $\lambda\neq\frac{5}{4}$ hipérbolas; $|\lambda|<1$ elipses.

5. $\lambda=2$, parábola; $\lambda=\dfrac{-1}{2}$, hipérbola equilátera; $0<\lambda<2$ elipses.

CAPITULO 20

Párrafo 20.2.

1. $$x_1^2+3x_2^2+7x_3^2-3=0.$$

2. $$\sqrt{2}\,x_3+(\sqrt{3}-1)x_1^2-(\sqrt{3}+1)x_2^2=0.$$

3. $$(150+6\sqrt{241})x_1^2+(150-6\sqrt{241})x_2^2-5\cdot051=0.$$

4. $$4+(2+\sqrt{6})x_1^2+(2-\sqrt{6})x_2^2=0.$$

Párrafo 20.3.

1. *a)* Paraboloide elíptico,

$$\sqrt{79}\,x_3+9x_1^2+9x_2^2=0;$$

b) cilindro hiperbólico,

$$1+(\sqrt{7}-1)x_1^2-(\sqrt{7}+1)x_2^2=0:$$

c) hiperboloide hiperbólico,

$$8x_1^2+32x_2^2-16x_3^2-1=0;$$

d) par de planos reales no paralelos,

$$(1-\sqrt{39})x_1^2+(1+\sqrt{39})x_2^2=0;$$

e) elipsoide real,

$$3x_1^2+9x_2^2+9x_3^2-2=0;$$

f) par de planos paralelos reales,

$$8x_1^2-3=0;$$

g) cilindro parabólico,

$$18x_1^2+\sqrt{30}\,x_2^2=0;$$

h) hiperboloide hiperbólico,

$$2x_1^2+(\sqrt{17}-3)x_2^2-(\sqrt{17}+3)x_3^2-18=0:$$

i) planos imaginarios no paralelos,

$$x_1^2+4x_2^2=0;$$

j) cilindro parabólico,

$$2\sqrt{2}\,x_2+6x_1^2=0;$$

k) paraboloide elíptico,

$$27x_1^2+12x_2^2+64x_3=0;$$

l) hiperboloide hiperbólico.

2. $-\infty<\lambda<-1$, hiperboloide hiperbólico; $\lambda=-1$, paraboloide hiperbólico; $-1<\lambda<-\frac{1}{3}$, hiperboloide hiperbólico; $\lambda=-\frac{1}{3}$, cono real; $-\frac{1}{3}<\lambda<1$, hiperboloide elíptico; $\lambda=1$, cilindro elíptico; $1<\lambda<2$, hiperboloide hiperbólico; $2<\lambda<\infty$, elipsoide imaginario.

3. $\lambda=1$, par de planos paralelos reales; $\lambda=-\frac{1}{2}$, cilindro elíptico.

4. Para $\lambda=\frac{15}{4}$, paraboloides. No hay conos. Para $\lambda=\frac{5}{2}$, par de planos.

CAPITULO 21

Párrafo 21.1.

1. $$(XAX'=0)\cap(X_o=0)=\begin{cases}a_{11}X_1^2+2a_{12}X_1X_2+a_{22}X_2^2=0\\ X_o=0\end{cases}$$

si

$$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-A_{oo}\gtreqless 0$$

dos puntos reales distintos (hipérbola), dos puntos reales confundidos (parábola), dos puntos imaginarios conjugados (elipse).

2. $$(a_{11}X_1^2+a_{11}X_2^2+2a_{01}X_oX_1+2a_{02}X_oX_2+a_{oo}X_o^2)\cap(X_o=0)=$$

$$=\begin{cases}X_1^2+X_2^2=0\\ X_o=0\end{cases}\Longrightarrow(0,\ 1+\ \pm i).$$

3. $$X_o+3X_1+X_2=0.$$

Párrafo 21.2.

1. *a)* $$(CBA)=\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC}-\overline{AB}}{\overline{AC}}=1-\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=1-\lambda;$$

b) $$(CAB)=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{1}{\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}}=\frac{1}{(CBA)}=\frac{1}{1-\lambda};$$

c)

$$(BAC)=\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}=\frac{1}{\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}}=\frac{1}{\frac{\overline{AB}-\overline{AC}}{\overline{AB}}}=\frac{1}{1-\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}}=\frac{1}{1-(ACB)}=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}}=\frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

2. a)

$$(ABCD)=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=(BADC)=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}=$$

$$=(CDAB)=\frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}\cdot\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=(DCBA);$$

b)
$$(ABDC)=\frac{(ADC)}{(BDC)}=\frac{(BCD)}{(ACD)}=\frac{1}{\frac{(ACD)}{(BCD)}}=\frac{1}{(ABCD)}=\frac{1}{\lambda};$$

c)

$$(ACBD)=\frac{(ABD)}{(CBD)}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{DC}}{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}=\frac{(\overline{AD}-\overline{BD})(\overline{BC}-\overline{BD})}{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}=$$

$$=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{BC}-\overline{AD}\cdot\overline{BD}-\overline{BD}\cdot\overline{BC}+\overline{BD}^2}{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}=1-\frac{(\overline{AD}+\overline{DB}+\overline{BC})\cdot\overline{BD}}{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}=$$

$$=1-\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}=1-(ABCD)=1-\lambda;$$

d)
$$(ACDB)=\frac{1}{(ACBD)}=\frac{1}{1-\lambda};$$

e)
$$(ADBC)=1-(ABDC)=1-\frac{1}{\lambda};$$

f)
$$(ADCB)=\frac{1}{(ADBC)}=\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}}=\frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

3.
$$(ABCD)=-1\Longrightarrow(ABDC)=\frac{1}{(ABCD)}=-1\Longrightarrow(ABCD)=(ABDC).$$

4.
$$(3,\ 2,\ 4,\ -5)=\frac{7}{16},\quad (3,\ 2,\ -5,\ 4)=\frac{16}{7}.$$

5. Si

$$x^2+mx+\pi=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2),\qquad x^2+6x-1=(x-a_1)(x-a_2),$$

$$x^2-3x+2=(x-b_1)(x-b_2)\Longrightarrow(\alpha_1,\ \alpha_2,\ a_1,\ a_2)=-1\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 2\alpha_1\alpha_2-(\alpha_1+\alpha_2)(a_1+a_2)+2a_1a_2=0\Longrightarrow 2n-6m-2=0;$$

análogamente,

$$2n+3m+4=0 \Longrightarrow m=-\frac{2}{3}, \qquad n=-1$$

Párrafo 21.3.

2.
$$\begin{vmatrix} x_0x_0' & x_0x_1'+x_1x_0' & x_1x_1' \\ a_0a_0' & a_0a_1'+a_1a_0' & a_1a_1' \\ b_0b_0' & b_0b_1'+b_1b_0' & b_1b_1' \end{vmatrix}=0.$$

3. *a)* Puntos dobles:

$$(1,\ 1) \quad \text{y} \quad \left(1,\ \frac{-3}{4}\right);$$

b) puntos límites:

$$\left(1,\ \frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(1,\ \frac{1}{4}\right);$$

c) característica:

$$-\frac{2}{5}.$$

4.
$$2x_0x_0'+4x_0x_1'-2x_0'x_1+2x_1x_1'=0;$$

elíptica;

$$\left(1,\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) \quad \left(1,\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

5. De

$$A+B(m+m')+Cmm'=0 \quad \text{y} \quad mm'=-1 \Longrightarrow Bm^2+(A-C)m-B=0$$

y

$$(A-C)^2+4B^2>0.$$

6. $mm'-m'+1=0.$

7. $mm'+1=0.$ Las rectas isótropas.

Párrafo 21.4.

1. $(1,\ 3,\ 0)$, $(1,\ 0,\ -1)$. Secante.

2. $(0,\ 1,\ 1)$, punto doble. $x_0=0.$

3.
$$X_1X_2+X_2^2=0.$$

4.
$$X_1^2+X_2^2-8X_0X_2+12=0.$$

Párrafo 21.5.

1. *a)*
$$11X_0-5X_1+4X_2=0;$$

b)
$$(8,\ 19,\ -2);$$

c) ecuación tangencial de la cónica

$$2U_0^2+8U_0U_1+10U_1^2+U_2^2=0,$$

ecuación del haz

$$\lambda_0(X_1-2X_0)+\lambda_1(X_2-X_0)=0,$$

ecuación de la involución

$$2\lambda_0\bar{\lambda}_0+3\lambda_1\bar{\lambda}_1=0;$$

d) la involución es elíptica, luego no hay rayos dobles reales; rayos principales

$$x_1=2, \quad x_2=1;$$

g)
$$8U_0U_1+20U_1^2+U_2^2=0.$$

2.
$$2X_0^2+8X_0X_1+6X_0X_2+2X_1^2+2X_1X_2-4X_2^2=0.$$

Párrafo 21.6.

1. Centro, $\cdot(2,\ 2,\ -1)$;

ejes,

$$(3\pm2\sqrt{2})X_0-(2\pm2\sqrt{2})X_1+2X_2=0;$$

asíntotas,

$$(1\mp2\sqrt{2})X_0-(2\mp2\sqrt{2})X_1-2X_2=0.$$

2. Se trata de una parábola. Foco $(2,\ -1,\ 1)$, directriz $X_1-X_2=0$.

3.
$$m=\frac{2-2\sqrt{3}\pm\sqrt{31}}{2\sqrt{3}+3}.$$

4. Elipse, $(0,\ \pm\sqrt{-a^2+b^2}),\quad (\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$;

hipérbola,

$$(0,\ \pm\sqrt{-a^2-b^2}),\quad (\pm\sqrt{a^2+b^2},\ 0);$$

parábola,

$$\left(\frac{p}{2},\ 0\right).$$

5. Llamando $c=\sqrt{a^2\mp b^2}$, la directriz correspondiente al foco $F\ (c,\ 0)$ es

$$f\equiv a^2b^2-cb^2x_1=0.$$

Si X es un punto de la cónica (elipse o hipérbola), llamando $e=\frac{c}{a}$,

$$d(X,\ F)=\pm(ex_1\pm a) \quad \text{y} \quad d(X,\ f)=\frac{\pm(ex_1\pm a)}{e},$$

luego

$$\frac{d(X,\ F)}{d(X,\ f)}=e.$$

En la parábola

$$f \equiv x_1 + \frac{p}{2} \quad \text{y} \quad d(X, F) = x_1 + \frac{p}{2} \quad \text{y} \quad d(X, f) = x_1 + \frac{p}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{d(X, F)}{d(X, f)} = 1.$$

6. $$d(X, F) = \sqrt{(F_o X_1 - F_1 X_o)^2 + (F_o X_2 - F_2 X_o)^2}$$

y

$$d(X, f) = \frac{d_o X_o + d_1 X_1 + d_2 X_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}} \quad \text{y} \quad \frac{d(X, F)}{d(X, f)} = \text{Cte.}$$

7. $$5X_o^2 - 4X_o X_1 + 2X_o X_2 + 2X_1 X_2 = 0.$$

8. 1.º, $$(1, 0, 0);$$

2.º, $$(7 \pm 5\sqrt{2})X_1 - X_2 = 0;$$

3.º, $$3X_1 - X_2 = 0 \quad \text{y} \quad 2X_1 - X_2 = 0;$$

4.º, ecuación del haz de vértice

$$(1, 1, 2) \quad \lambda_o(X_1 - X_o) + \lambda_1(X_2 - 2X_o) = 0,$$

ecuación de la involución

$$71\lambda_o\bar{\lambda}_o - 98(\lambda_o\bar{\lambda}_1 + \lambda_1\bar{\lambda}_o) - 676\lambda_1\bar{\lambda}_1 = 0$$

9. $$(a^2 + \lambda) - (b^2 + \lambda) = a^2 - b^2 = c^2.$$

10. Las cónicas homofocales a una cónica $\mathcal{C}$ son tangentes a las cuatro tangentes trazadas por los puntos cíclicos a $\mathcal{C}$. Los pares de tangentes desde P a las cónicas del sistema homofocal son pares de rayos de una involución; los rayos dobles son las tangentes a las dos cónicas del sistema que pasan por P; estos rayos están separados armónicamente por cada pareja de conjugados, en particular por los que unen a P con los puntos cíclicos, luego son perpendiculares.

Párrafo 21.7.

1. 1.º $(1, 0, 0)$, $(1, 0, -2)$ y $(1, 2, 0)$ doble;

2.º $$-2X_o^2 + 3X_o X_1 - 2X_o X_2 - X_1^2 + 2X_1 X_2 = 0;$$

3.º $$4X_o X_1 X_2 - 2X_o X_2^2 - 4X_o^2 X_2 + 2X_1 X_2^2 - X_1^2 X_2 = 0.$$

2. Para $$\lambda = 1 \Longrightarrow (2X_1 + (1 - i)X_o)(2X_1 + (1 + i)X_o) = 0$$

y para

$$\lambda = 2 \Longrightarrow (X_o - X_1 + X_2)^2 = 0$$

3. 1.º $9X_o^2-9X_oX_1-12X_oX_2+3X_1X_2+4X_2^2=0;$

2.º $(1,\ -4,\ 3);$

3.º $3X_1+4X_2=0;$

4.º $15X_o+3X_1-X_2=0,$

y

$$5X_o-X_1-3X_2=0.$$

4. $$\{X(A+B)X'=0\}\cap\{X=P+\mu Q\}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}P(A+\lambda B)P'+2P(A+\lambda B)Q'\mu+Q(A+\lambda B)Q'\mu^2=0\\ X=P+\mu Q\end{cases}$$

$$\sim\begin{cases}PAP'+2PAQ'\mu+QAQ'\mu^2+\lambda(PBP'+2PBQ'\mu+QBQ'\mu^2)=0\\ X=P+\mu Q\end{cases}$$

Haz de circunferencias

$$\lambda_o(2X_o-X_1-X_2)^2+\lambda_1(2X_oX_2-X_1^2-X_2^2)=0.$$

Cortando por

$$X_2=0\Longrightarrow\lambda_o(X_o-X_1)^2-\lambda_1X_1^2=0.$$

Para cada par de valores $(\lambda_o,\ \lambda_1)$ se obtienen dos puntos conjugados de la involución. Puntos dobles para (1, 0) y (0, 1), luego la única circunferencia tangente es la

$$2X_oX_2-X_1^2-X_2^2=0.$$

6. $$4X_oX_2-X_1^2-X_2^2=0.$$

7. $12X_oX_1+13X_1X_2+6X_2^2=0;$ hipérbola;

$$\left(1,\ \frac{144}{169},\ -\frac{12}{13}\right);\qquad 12X_o+13X_2=0,\qquad -72X_o+169X_1+6X_2=0.$$

CAPITULO 22

Párrafo 22.1.

1. Si $v_r=(v_1,\ v_2,\ v_3)$ y $w_s=(w_1,\ w_2,\ w_3)$ son vectores de dirección de r y s y

$$r\perp s\Longrightarrow v_r\cdot w_s=v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3=0,$$

pero $(0,\ v_1,\ v_2,\ v_3)$ y $(0,\ w_1,\ w_2,\ w_3)$ son los puntos del infinito de r y s y la relación anterior es la de conjugación respecto a la cónica

$$\begin{cases}X_1^2+X_2^2+X_3^2=0\\ X_o=0\end{cases}.$$

2. Recta del infinito del plano

$$aX_o+bX_1+cX_2+dX_3=0\Longrightarrow\begin{cases}bX_1+cX_2+dX_3=0\\ X_o=0\end{cases}$$

Condición de ser perpendicular a la recta cuyo punto del infinito es

$$(0,\ v_1,\ v_2,\ v_3) \Longrightarrow \frac{b}{v_1}=\frac{c}{v_2}=\frac{d}{v_3}$$

que es la condición de ser el punto $(0,\ v_1,\ v_2,\ v_3)$ y la recta

$$\begin{cases} bX_1+cX_2+dX_3=0 \\ X_0=0 \end{cases}$$

polo y polar respecto al círculo absoluto.

3. Análogamente a los anteriores.

4. $$\begin{cases} (X_1-aX_0)^2+(X_2-bX_0)^2+(X_3-cX_0)^2=R^2X_0 \\ X_0=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X_1^2+X_2^2+X_3^2=0 \\ X_0=0 \end{cases}.$$

5. $$AX_0+B(X_1-13)+C(X_2-1)+D(X_3+4)=0.$$

Párrafo 22.2.

1. $$3X_1+2X_2+3X_3=0$$

2.

$$81X_0^2-72X_0X_1+78X_0X_2-18X_0X_3+18X_1^2-36X_1X_2+23X_2^2-6X_2X_3+9X_3^2=0.$$

3. $$(15X_0-15X_1+5X_2-24X_3)^2+73(18X_0X_1+12X_0X_2+18X_0X_3-9X_1^2+ +6X_1X_2+2X_2^2+6X_2X_3-9X_3^2)=0.$$

4. $$6X_0+3X_1+4X_2-3X_3=0, \qquad 18X_0+3X_1+4X_2-3X_3=0.$$

Párrafo 22.3.

1. Los puntos singulares son las soluciones del sistema $XA=0$. En los conos $\operatorname{rg} A=3$ y $A_{00}\neq 0$, luego hay un único punto singular y es propio. Si P es el punto singular y

$$Q \in XAX'=0 \Longrightarrow X=\lambda P+\mu Q \in XAX'=0,$$

pues

$$PAP'=f_{P_0}P_0+f_{P_1}P_1+f_{P_2}P_2+f_{P_3}P_3=0, \qquad QAQ'=0,$$

y

$$PAQ'=f_{P_0}Q_0+f_{P_1}Q_1+f_{P_2}Q_2+f_{P_3}Q_3=0$$

2. En los cilindros $\operatorname{rg} A=3$ y $A_{00}=0$.

3. $16\lambda\mu+8\lambda-1=0$; $(5\pm 3\sqrt{2})X_0+(1\mp\sqrt{2})X+(-2\mp 2\sqrt{2})X_2+4X_3=0.$

4. Son los planos dobles de la involución de planos conjugados que la polaridad definida por la cuádrica subordina en el haz de planos de arista la recta dada.

5. $$\left(1, \frac{2\pm\sqrt{6i}}{10}, -\frac{2\pm\sqrt{6i}}{10}, \frac{B\mp\sqrt{6i}}{20}\right).$$

Párrafo 22.4.

1. Es consecuencia de la definición de centro y del hecho de que el conjugado armónico del punto del infinito de una recta respecto a otros dos, es el punto medio del segmento determinado por ambos.

2. $$\begin{cases} 2X_0+X_1+X_2+2X_3=0 \\ -4X_0-X_1+5X_2-4X_3=0 \end{cases}; \quad (1, 0, 0, -1).$$

3. Planos principales:

$$X_0-X_1=0, \quad \lambda(X_0-X_2)+\mu(X_0-X_3)=0.$$

Ejes: $$\begin{cases} X_0-X_2=0 \\ X_0-X_3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_0-X_1=0 \\ \lambda(X_0-X_2)+\mu(X_0-X_3)=0 \end{cases}.$$

4. La cuádrica dada y la de ecuación

$$-2X_0^2+33X_0X_1-17X_0X_2-16X_1^2+8X_1X_2-16X_1X_3+X_2^2+8X_2X_3-2X_3^2=0$$

5. $$15X_0^2-2X_0X_2-8X_0X_3+3X_1^2-X_2^2+X_3^2=0.$$

6. Parábola.

CAPITULO 23

Párrafo 23.1.

1. $x_1=2\cos t, \quad x_2=2\operatorname{sen} t; \qquad x_1=\dfrac{2}{\pm\sqrt{1+t^2}}, \quad x_2=\dfrac{2}{\pm\sqrt{1+t^2}}.$

2. 1.º Si $\mathcal{C}$ es una hipérbola $a>0$; cortando por el haz de rectas

$$x_2=\sqrt{a}x_1+t \Longrightarrow x_1=\frac{t^2-c}{2(b-\sqrt{a}t)}, \quad x_2=\frac{-\sqrt{a}t^2+2bt-\sqrt{a}c}{2(b-\sqrt{a}t)}.$$

2.º Si $\mathcal{C}$ corta a $x_1=0 \Longrightarrow c>0$; cortando por

$$x_2-\sqrt{c}=tx_1 \Longrightarrow x_1=\frac{2b-2\sqrt{c}t}{t^2-a}, \quad x_2=\frac{-\sqrt{c}t^2+2bt-a\sqrt{c}}{t^2-a}.$$

3.º Si $ax_1^2+2bx_1+c=a(x_1-p_1)(x_2-p_2)$, cortando por

$$x_2=t(x_1-p_1) \Longrightarrow x_1=\frac{p_1t_1^2-ap_2}{t^2-a}, \quad x_2=\frac{a(p_1-p_2)t}{t^2-a}.$$

Párrafo 23.2.

1. Cortes con los ejes:

$$(2,\ 0), \quad \left(\frac{1}{2},\ 0\right), \quad \left(0,\ \frac{2}{3}\right).$$

Máximo: $\left(1,\ \frac{1}{4}\right)$, mínimo: $\left(-1,\ \frac{9}{16}\right)$

Inflexión para $x_1 \sim -2'15$. Asíntotas:

$$x_2=\frac{2}{3}, \quad x_1=3, \quad x_1=\frac{1}{3}.$$

2. $$x_2+4=(2\pm 2\sqrt{5})(x_1-1).$$

3. Mínimo $(1,\ e)$; asíntota $x_2=x_1+1$.

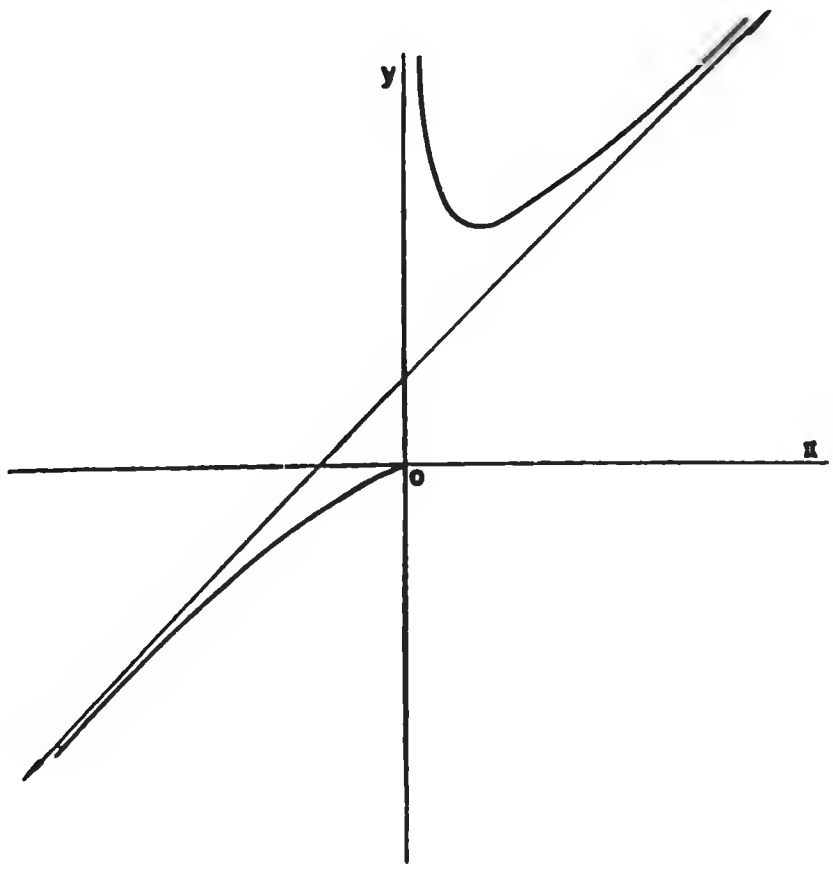


FIG. 20.

4. $$\lambda=\frac{9}{5}, \qquad \mu=\frac{-2}{5}.$$

Párrafo 23.3.

1. $$4(1+m)^3-27m+108=0.$$

2. Asíntotas $x_2=2x_1$, $x_2=-2x_1$. Es una hipérbola cuyos ejes son los ejes coordenados.

3. Para $t=2$, punto de retroceso. Para $t=-2$, máximo. No hay asíntotas. Ramas parabólicas para $t\to\infty$. Corte con los ejes para

$$t=2\sqrt{3} \quad \text{y} \quad t=0 \Longrightarrow x_2=0;$$

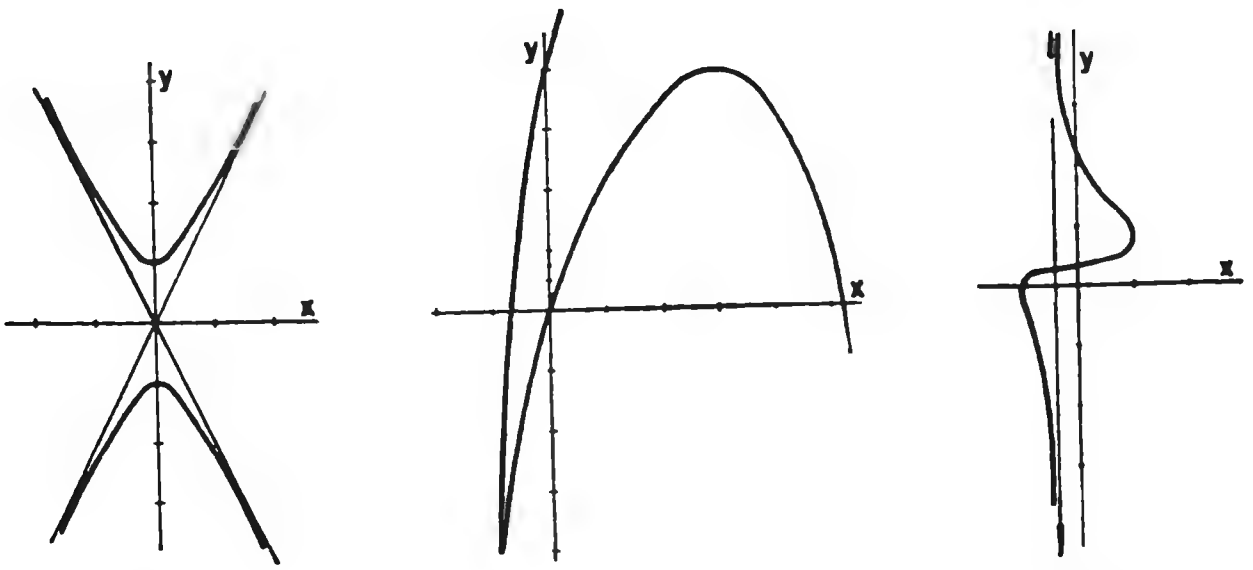
para

$$t=4 \quad \text{y} \quad t=0 \Longrightarrow x_1=0.$$

4. Asíntota $x=\frac{-5}{13}$. Corte con la asíntota en $x_2=\frac{1}{3}$. Cortes con los ejes:

$$t=0 \Longrightarrow (-1,\ 0), \quad t=1 \Longrightarrow \left(0,\ \frac{2}{5}\right), \quad t=-1 \Longrightarrow (0,\ 2).$$

Tangentes paralelas a Ox_2 en $t=0$ y $t=\infty$.



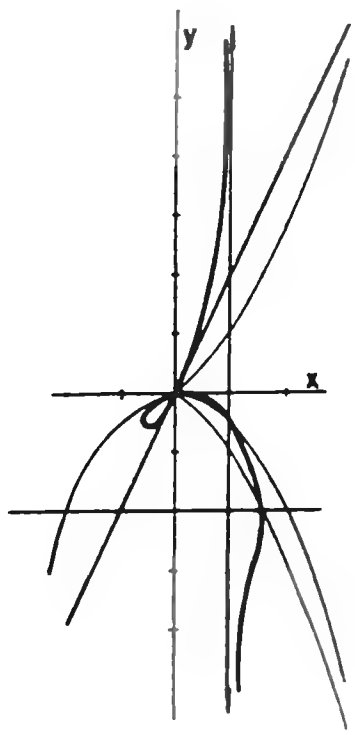
Ej. 2. Ej. 3. Ej. 4.

FIG. 21.

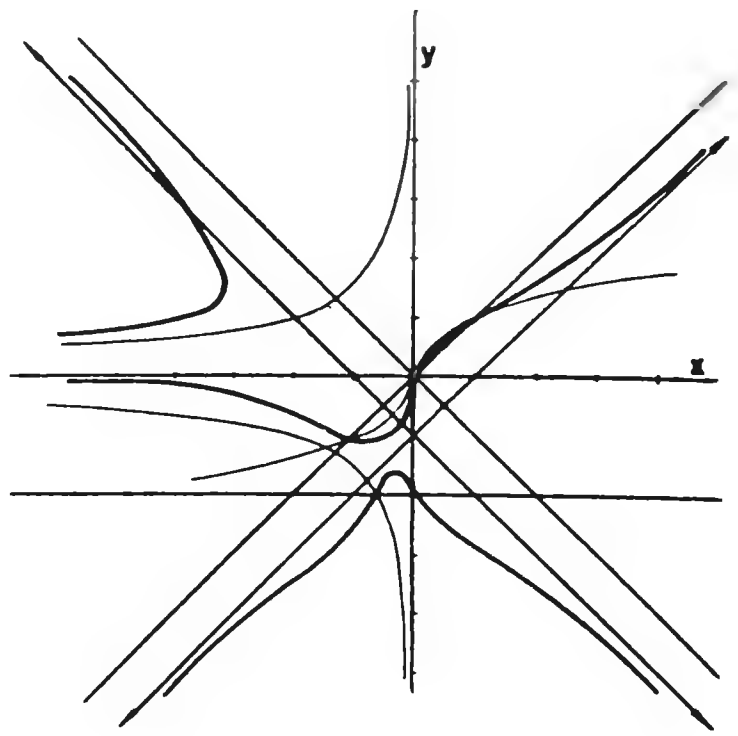
Párrafo 23.4.

1. Punto singular en el origen con tangentes $x_1=0$, $x_2=2x_1$. Asíntota $x_1=1$. Máximo (0, 0), mínimo $(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2})$.

2. Punto de inflexión en el origen con tangente $x_1=0$. Asíntotas $x_2^2=0$, $x_2=x_1-1$, $x_2=-x_1-1$. Máximos y mínimos $\left(\frac{-1}{3}, -1'6\right)$, $(-1, -1)$.



Ej. 1.



Ej. 2.

FIG. 22.

CAPITULO 24

Párrafo 24.1.

1. *a)*

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = -\operatorname{sen} t \operatorname{Ch} t + 6t \operatorname{Ln} t \operatorname{sen} t - t \cos t \operatorname{Ch} t + 5 \operatorname{Ln} t \cdot \frac{t^2+1}{t} + $$
$$+ 3t^2 \operatorname{Ln} t \cos t - t \operatorname{sen} t \operatorname{Sh} t + \frac{5t^2-5}{t^2} + 3t \operatorname{sen} t + 15t^2 - 5;$$

b)

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})] = \left(t \operatorname{Ln} t - \frac{49t^2+1}{t} + 5 \cos t \operatorname{Ch} t + 5 \operatorname{sen} t \operatorname{Sh} t \right) \mathbf{u}_1 +$$
$$+ \left(3 \operatorname{Ln} t(1-3t^2) + 5 \operatorname{Ln} t \cos t - 3(t^2-1) + 5 \frac{\operatorname{sen} t}{t} \right) \mathbf{u}_2 + (30(t^2-1) +$$
$$+ 15t(t^2+1) - \operatorname{sen} t(6t \operatorname{Ch} t + \operatorname{Ln} t) - t \cos t(3t \operatorname{Ch} t + \operatorname{Ln} t))\mathbf{u}_3.$$

2. $$\frac{d}{dt}|\mathbf{v}| = \frac{d}{dt}\sqrt{\mathbf{v}^2} = \frac{2\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'}{2\sqrt{\mathbf{v}^2}} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'}{\sqrt{\mathbf{v}^2}} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}'}{|\mathbf{v}|}.$$

3. Si

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}=0 \quad \forall \quad t\in I \Longrightarrow \begin{cases} v_1(b)-v_1(a)=(b-a)v_1'(\xi_1)=0 \\ v_2(b)-v_2(a)=(b-a)v_2'(\xi_2)=0 \\ v_3(b)-v_3(a)=(b-a)v_3'(\xi_3)=0 \end{cases}$$

$$a,b\in I_{,,} \quad a<\xi_i<b_{,,} \quad i=1,\ 2,\ 3 \Longrightarrow \mathbf{v}(b)=\mathbf{v}(a) \quad \forall \quad a,b\in I.$$

4. Si

$$\mathbf{v}'=\lambda\mathbf{v} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}=k\mathbf{u} \ (\mathbf{u},\ \text{unitario}) \Longrightarrow \mathbf{v}'=k'\mathbf{u}+k\mathbf{u}'=\lambda\mathbf{u} \Longrightarrow \mathbf{u}'=0 \Longrightarrow \mathbf{u}$$

de dirección constante. Nos hemos basado en que $\mathbf{u}'\neq\mathbf{u}$, lo que es consecuencia de que

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}^2=0 \Longrightarrow 2\mathbf{u}'\cdot\mathbf{u}=0 \Longrightarrow \mathbf{u}'\perp\mathbf{u}.$$

Párrafo 24.2.

1. Para $\quad \operatorname{sen} t=0 \Longrightarrow -x_2+3(x_3-k\pi)=0,$

para

$$\operatorname{sen} t=\frac{6}{10} \Longrightarrow 6\left(x_1-\frac{24}{10}\right)-8\left(x_2-\frac{18}{10}\right)+$$

$$+30\left(x_3-\operatorname{arc\,sen}\frac{6}{10}\right)=0.$$

2. Plano osculador

$$-(x_1-8)+6(x_2-4)-12(x_3-2)=0,$$

normal

$$12(x_1-8)+4(x_2-4)+(x_3-2)=0,$$

recta tangente

$$\frac{x_1-8}{12}=\frac{x_2-4}{4}=\frac{x_3-2}{1},$$

recta binormal

$$\frac{x_1-8}{-1}=\frac{x_2-4}{6}=\frac{x_3-2}{-12}$$

plano rectificante

$$54(x_1-8)-143(x_2-4)-76(x_3-2)=0,$$

recta normal principal

$$\frac{x_1-8}{54}=\frac{x_2-4}{-143}=\frac{x_3-2}{-76}$$

3. $$A=\frac{27}{4}\sqrt{14}.$$

4. $$\operatorname{arc\,sen}\frac{-18}{\sqrt{5}\sqrt{357}}.$$

Párrafo 24.3.

2. $$\kappa=\frac{3\sqrt{2}}{32}, \qquad \tau=-\frac{3\sqrt{2}}{32}.$$

3. $\tau=\dfrac{18+3t^2}{52+25t^2+4t^4}$. Para $t=0$, $\tau=\dfrac{9}{26}$. Plano osculador $-3x_1+2x_3=0$.

4. $$\kappa=\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{6}}, \qquad \tau=-\frac{3}{22}.$$

5. $$\tau=\frac{16}{16(t^4+4t^2+1)} \Longrightarrow t=\pm 1.$$

Para

$$t=1 \Longrightarrow \mathbf{t}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \mathbf{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\mathbf{b}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Para

$$t=-1 \Longrightarrow \mathbf{t}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \mathbf{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\mathbf{b}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

CAPITULO 25

Párrafo 25.1.

1. $$48x_2^2-48x_1^2-40x_1x_2-507x_3+2.028=0.$$

Es un paraboloide hiperbólico.

2. $$4x_3^3-2x_3^2x_2-6x_3^2-3x_2^2+3x_2x_3+9x_3-18x_2-27=0.$$

3. Plano tangente

$$f'(u)(x_1 \operatorname{sen} u-x_2\cos u)+v(-kx_1\cos u-kx_2 \operatorname{sen} u+x_3-f(u)=0,$$

que para $u=$Cte es un haz de planos de arista

$$\begin{cases} x_1 \operatorname{sen} u_o- x_2\cos u_o=0 \\ kx_1\cos u_o+kx_2 \operatorname{sen} u_o-x_3+f(u_o)=0 \end{cases}$$

4. $$6(x_1-2)-(x_3-4)=0; \quad \frac{x_1-2}{6}=\frac{x_2}{0}=\frac{x_3-4}{-1}.$$

5. $4\left(x_1+\frac{1}{4}\right)-(x_3+2)=0;\quad \frac{x_1+\frac{1}{4}}{4}=\frac{x_2+\frac{1}{2}}{0}=\frac{x_3+2}{-1}.$

6. Eliminando los parámetros u y $v \Longrightarrow \frac{x_1^2}{9}-\frac{x_2^2}{16}+x_3=0$ que es la ecuación de un cono de vértice el origen de coordenadas:

$$f_{x_1}(0)=f_{x_2}(0)=f_{x_3}(0)=.$$

7. $\alpha=0$.

Párrafo 25.2.

1. $-4+4x_1+6x_2+5x_3-4x_1x_2-x_1x_3-3x_2x_3-2x_2^2-x_3^2=0.$

2. $(2x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3-4x_2)^2+(2x_2^2+x_2x_3-x_1x_3-4x_2)^2=$
$=4(x_2x_3+x_1x_3+4x_2)^2.$

3. $3x_1^2x_2^2-4x_1^3x_3+6x_1x_2x_3-4x_2^3-x_3^2=0.$

4. $x_2^2+4x_3^2-x_1^2=0.$

5. $r_1\equiv\begin{cases}x_1-1=0\\ x_2-2x_3=0\end{cases},\qquad r_2\equiv\begin{cases}x_1-1=\frac{4}{5}(x_3-2)\\ x_2-4=\frac{6}{5}(x_3-2)\end{cases}$

$$\alpha=\operatorname{arc\,cos}\frac{17}{\sqrt{5}\sqrt{77}}.$$

6. $x_1^2+x_2^2+2x_3^2+3x_1x_3+2x_2x_3-6x_1-4x_2-13x_3+13=0.$

7. Sí. (2, 3, 5).

8. $x_2^3-3x_2^2x_3+3x_2x_3^2-x_3^3-2x_1^2-6x_3^2+7x_1x_3+x_1x_2-2x_2x_3=0.$

9. Sí, $\mathbf{v}=(2, 1, 1)$.

10. $x_1^2x_3^2-2x_1x_2x_3^2+x_2^2x_3^2-96x_1^2-96x_2^2=0.$

Párrafo 25.3.

1. $11(x_1-2)^2+23(x_2+3)^2-16(x_1-2)(x_2+3)+32(x_1-2)(x_3-4)+$
$+16(x_2+3)(x_3-4)+11(x_3-4)^2=0.$

2. $x_3^2-2x_1x_2+2=0.$

3. $x_1=-\frac{19}{5}u+t^2,\quad x_2=3-\frac{6}{5}u+2t,\quad x_3=u+3t.$

JAR'23

índice general

PÁG.

13. Geometría afín del plano 5

13.1. Plano afín. Coordenadas en el plano afín 5
13.2. Ecuación vectorial de la recta. Ecuaciones paramétricas. Posiciones relativas de puntos y rectas 9
13.3. Ecuaciones en forma continua y general de la recta. Posiciones relativas de puntos y rectas 14

14. Geometría afín del espacio 24

14.1. Espacio afín. Coordenadas en el espacio afín 24
14.2. Ecuación vectorial del plano. Ecuaciones paramétricas ... 27
14.3. Ecuación vectorial de la recta. Ecuaciones paramétricas ... 29
14.4. Posiciones relativas de planos y rectas 31
14.5. Ecuación general del plano. Posiciones relativas de planos. 38
14.6. Ecuaciones no paramétricas de la recta 47

15. Espacio afín asociado a un espacio vectorial 54

15.1. Espacio afín asociado a un espacio vectorial 54
15.2. Variedades lineales afines 56
15.3. Ecuaciones de las variedades lineales afines 58
15.4. Subconjuntos convexos de un espacio afín asociado a un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales ... 61

16. El plano euclídeo 66

16.1. Producto escalar 66
16.2. Cambio de base en el espacio vectorial euclídeo 70
16.3. El plano euclídeo 72
16.4. Cambio de sistema de referencia en el plano euclídeo ... 81

PÁG.

17. El espacio euclídeo tridimensional 84

17.1. Producto escalar 84
17.2. Producto vectorial. Propiedades 85
17.3. Producto mixto. Propiedades 89
17.4. Doble producto vectorial 92
17.5. El espacio euclídeo tridimensional 94
17.6. Cambio de sistema de referencia en el espacio euclídeo ... 108

18. Formas cuadráticas 111

18.1. Formas bilineales y cuadráticas 111
18.2. Espacios vectoriales euclídeos 114
18.3. Diagonalización de matrices 116
18.4. Diagonalización de matrices simétricas 120

19. Cónicas 126

19.1. Definiciones y notación 126
19.2. Ecuaciones reducidas de las cónicas 128
19.3. Clasificación afín y métrica de las cónicas 134

20. Cuádricas 139

20.1. Definiciones y notación 139
20.2. Ecuaciones reducidas de las cuádricas 140
20.3. Invariantes métricos de las cuádricas 146
20.4. Clasificación afín de las cuádricas 150

21. Cónicas (continuación) 155

21.1. Coordenadas homogéneas en el plano 155
21.2. Coordenadas en la recta. Coordenadas homogéneas. Razón simple de tres puntos. Razón doble de cuatro puntos ... 159
21.3. Proyectividad en las figuras de primera categoría 163
21.4. Posición relativa de una recta y una cónica 169
21.5. Polaridad en las cónicas 174
21.6. Centros, diámetros, asíntotas, ejes y focos de las cónicas. 182
21.7. Determinación de cónicas. Haces de cónicas 190

22. Cuádricas (continuación) 196

22.1. Coordenadas homogéneas en el espacio. Puntos del infinito. Puntos imaginarios. Elementos isótropos 196
22.2. Posición relativa de una recta y una cuádrica 199
22.3. Polaridad en las cuádricas 204
22.4. Centros, planos diametrales, diámetros, planos principales y ejes de una cuádrica 209

PÁG.

23. Curvas planas ... 219

23.1. Concepto de curva plana ... 219
23.2. Curvas planas en forma explícita ... 221
23.3. Curvas planas en forma paramétrica ... 228
23.4. Curvas planas en forma implícita ... 232

24. Curvas alabeadas ... 238

24.1. Nociones de análisis vectorial ... 238
24.2. Curvas alabeadas ... 240
24.3. Triedro intrínseco ... 245

25. Superficies ... 252

25.1. Concepto de superficie ... 252
25.2. Superficies regladas ... 257
25.3. Superficies de revolución. Superficies de traslación ... 267

Soluciones a los ejercicios ... 271

Capítulo 13 ... 271
Capítulo 14 ... 276
Capítulo 15 ... 279
Capítulo 16 ... 281
Capítulo 17 ... 284
Capítulo 18 ... 288
Capítulo 19 ... 290
Capítulo 20 ... 291
Capítulo 21 ... 292
Capítulo 22 ... 297
Capítulo 23 ... 299
Capítulo 24 ... 302
Capítulo 25 ... 304

GOKO GRILL
JAR'23

GOIKO GRILL
GAES
JAR'23

JAR'23

JAR'23